Vers une interprétation galoisienne de la théorie de l'homotopie.

Bertrand Toen

Vers une interprétation galoisienne de la théorie de l'homotopie

B. Toën

January 15, 2013

Abstract

Given any CW complex X, and $x \in X$, it is well known that $\pi_1(X,x) \simeq Aut(\omega_x^0)$, where ω_x^0 is the functor which associates to each locally constant sheaf on X its fibre at x. The purpose of the present work is to generalize this formula to higher homotopy. For this we introduce the 1-Segal category of locally constant (∞-)stacks on X, and we prove that the H_∞-space of endomorphisms of its fibre functor at x is equivalent to the loop space $\Omega_x X$.

Résumé

Étant donné un CW complexe X, et $x \in X$, il est bien connu que $\pi_1(X,x) \simeq Aut(\omega_x^0)$, où ω_x^0 est le foncteur qui associe à tout faisceau localement constant sur X sa fibre en x. Le but du présent travail est de généraliser cet isomorphisme à l'homotopie supérieure. Pour cela nous introduisons la 1-catégorie de Segal des (∞-)champs localement constants sur X, et nous montrons que le H_∞-espace des endomorphismes de son foncteur fibre en x est équivalent à l'espace des lacets $\Omega_x X$.

Table des matières

0 Introduction

Pour tout CW complexe pointé et connexe (X,x), il est bien connu que la monodromie induit un isomorphisme naturel découvert par A. Grothendieck

$$\pi_1(X,x) \simeq End(\omega_x^0) \quad \text{(isomorphisme de monoïdes)},$$

où ω_x^0 est le foncteur qui associe à tout faisceau localement constant sur X sa fibre en x (en particulier tout endomorphisme de ω_x^0 est en réalité un automorphisme). Ainsi, le groupe fondamental de l'espace topologique pointé (X,x) peut être reconstruit à l'aide de la catégorie des faisceaux localement constants sur X munie de son foncteur fibre. Le but de ce travail est de généraliser ce résultat à l'homotopie supérieure. Pour cela nous utiliserons des analogues supérieurs des notions de groupe fondamental, de faisceau localement constant, de catégorie et de monoïde des endomorphismes d'un foncteur. Ces notions supérieures seront respectivement celles de H_∞-espace des lacets, de *(∞-)champs localement constants* (voir Def. 2.4), de 1-*catégories de Segal* (voir Def. 1.6), et de H_∞*-espace des endomorphismes dérivées d'un foncteur simplicial* (voir Def. 1.10), dont nous donnerons un apperçu dans la suite de cette introduction. Notre résultat principal (voir Cor. 3.2) est alors la construction d'une équivalence faible naturelle de H_∞-espaces (voir Def. 1.3)

$$\Omega_x X \simeq \mathbb{R}End(\omega_x).$$

Ainsi, comme X est faiblement équivalent au classifiant $B\Omega_x X$, le type d'homotopie d'un CW complexe pointé et connexe (X,x) peut être reconstruit à l'aide de la 1-catégorie de Segal des ($\infty-$)champs localement constants sur X munie de son foncteur fibre. L'équivalence faible $\Omega_x X \simeq \mathbb{R}End(\omega_x)$ mérite sans doutes le nom d'∞-*monodromie universelle* (voir la remarque à la fin du §3).

L'isomorphisme $\pi_1(X,x) \simeq End(\omega_x^0)$

Commençons par rappeler brièvement une construction de l'isomorphisme $\pi_1(X,x) \simeq End(\omega_x^0)$ cité plus haut, qui nous servira de modèle tout au long de ce travail.

Considérons $Loc_0(X)$ la catégorie des faisceaux d'ensembles localement constants sur X. On dispose du foncteur fibre en x, $\omega_x^0 : Loc_0(X) \longrightarrow Ens$. La construction qui associe à un faisceau localement constant sa monodromie induit une équivalence entre la catégorie $Loc_0(X)$, et la catégorie $\pi_1(X,x) - Ens$, des ensembles munis d'une action (disons à gauche) du groupe $\pi_1(X,x)$. A travers cette équivalence le foncteur fibre ω_x^0 est transformé en le foncteur d'oubli $\omega^0 : \pi_1(X,x) - Ens \longrightarrow Ens$, et on a donc $End(\omega_x^0) \simeq End(\omega^0)$. Enfin, le foncteur ω^0 est co-représenté par l'objet E de $\pi_1(X,x) - Ens$ défini par l'action de $\pi_1(X,x)$ sur lui-même par translations. Le lemme de Yoneda implique alors l'existence d'isomorphismes naturels

$$End(\omega_x^0) \simeq End(\omega^0) \simeq End(E).$$

Enfin, il est immédiat de constater que l'application qui envoie un endomorphisme ϕ de E sur $\phi(e)^{-1} \in \pi_1(X,x)$ induit un isomorphisme de monoïdes $End(E) \simeq \pi_1(X,x)$. En conclusion, il existe une chaine d'isomorphismes naturels de monoïdes

$$End(\omega_x^0) \simeq End(\omega^0) \simeq End(E) \simeq \pi_1(X,x).$$

Si l'on explicite ces isomorphismes, on peut comprendre l'isomorphisme $\pi_1(X,x) \simeq End(\omega_x^0)$ de la façon suivante. Pour un lacet $\gamma \in \pi_1(X,x)$, et un faisceau localement constant $F \in Loc_0(X)$, la monodromie de F le long de γ induit un automorphisme $\gamma_F : \omega_x^0(F) \simeq \omega_x^0(F)$. Il est facile de voir que cet automorphisme est fonctoriel en F, et définit donc un automorphisme $[\gamma]$ du foncteur ω_x^0. On peut vérifier que l'isomorphisme $\pi_1(X,x) \simeq End(\omega_x^0)$ décrit ci-dessus est induit par la correspondance $\gamma \mapsto [\gamma]$. Notre approche est de procéder par analogie et de généraliser pas à pas la démarche précédente à l'homotopie supérieure.

Champs localement constants

Pour expliquer notre point de vue sur la notion de champs rappelons une construction (non conventionnelle) du topos de l'espace X (i.e. d'une catégorie qui est naturellement équivalente à la catégorie des faisceaux sur X) qui n'utilise pas directement la notion de faisceaux. Pour cela, soit $Pr(X)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur l'espace topologique X. Dans cette catégorie on considère l'ensemble W des morphismes qui induisent des isomorphismes fibre à fibre, et on forme la catégorie $W^{-1}Pr(X)$, obtenue à partir de $Pr(X)$ en inversant formellement les morphismes de W. On peut alors vérifier que $W^{-1}Pr(X)$ est naturellement équivalente à la catégorie des faisceaux sur X. Il faut remarquer que les objets de $W^{-1}Pr(X)$ sont les préfaisceaux sur X, mais ses ensembles de morphismes sont en réalité isomorphes aux ensembles de morphismes entre faisceaux associés. Aussi surprenant que cela puisse paraître, cette construction montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître la notion de faisceaux pour pouvoir parler de la catégorie des faisceaux sur X.

Nous définirons la catégorie simpliciale[1] des champs sur X en s'appuyant sur le même principe, à savoir qu'il n'est pas nécessaire de connaître la notion de *champs* pour pouvoir parler de la *catégorie simpliciale des champs sur* X. Ainsi, il ne s'agit pas de donner une définition précise de *champs*, mais de construire une *catégorie simpliciale des champs sur* X qui est raisonnable. Les objets de cette catégorie n'auront pas grande importance par la suite, et c'est la catégorie dans son ensemble à laquelle nous nous intéresserons.

Soit $SPr(X)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles simpliciaux sur l'espace topologique X. Dans cette catégorie on considère l'ensemble W des morphismes qui induisent des équivalences faibles fibre à fibre. La catégorie simpliciale des champs sur X est par définition la localisée simpliciale de Dwyer-Kan $LSPr(X) := L(SPr(X), W)$, obtenue à partir de $SPr(X)$ en inversant formellement les morphismes de W (voir [4] et Def. 2.3). On définit ensuite la catégorie simpliciale des champs localement constants sur X comme la sous-catégorie simpliciale pleine de $LSPr(X)$ formée des objets qui sont localement équivalents à des champs constants (voir Def. 2.4). C'est cette dernière catégorie simpliciale qui nous intéressera par la suite, et qui sera notée $Loc(X)$. Par définition $Loc(*)$ sera simplement notée Top, et est la localisée simpliciale de Dwyer-Kan de la catégorie des ensembles simpliciaux le long des équivalences faibles. Enfin, il est clair que la construction $X \mapsto Loc(X)$ est fonctorielle en X, et donc le morphisme $* \longrightarrow X$ correspondant au point de base $x \in X$ induit un foncteur simplicial

$$\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Loc(*) =: Top,$$

qui sera notre foncteur fibre.

Catégories simpliciales, 1*-catégories de Segal et* $\mathbb{R}End(\omega_x)$

[1] Tout au long de ce travail, l'expression *catégorie simpliciale* fera référence à la notion de catégorie enrichie dans les ensembles simpliciaux. Il s'agit donc de la notion utilisée dans [4], et non de la notion plus générale d'objet simplicial dans la catégorie des catégories.

Nous venons de définir la catégorie simpliciale $Loc(X)$ des champs localement constants sur X, et son foncteur fibre $\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Top$. Notre problème est maintenant de définir de façon convenable un ensemble simplicial des endomorphismes de ω_x. Bien entendu, il existe un ensemble simplicial naïf $End(\omega_x)$, des endomorphismes simpliciaux de ω_x. Cependant, $End(\omega_x)$ ne possède pas *le bon type d'homotopie*, et il est fort probable que notre résultat principal soit faux si on utilise cette définition. Une façon de résoudre ce problème est de trouver une version *dérivée* de la construction $\omega_x \mapsto End(\omega_x)$. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser la théorie des 1-catégories de Segal et de ses Hom internes (voir [14, 16]). La notion de 1-catégorie de Segal est une notion affaiblie de celle de catégorie simpliciale, exactement de la même manière que la notion de H_∞-espace est une notion affaiblie de celle de groupe simplicial. Les catégories simpliciales s'identifient de plus aux 1-catégories de Segal *strictes*, et il est vrai que toute 1-catégorie de Segal est équivalente à une catégorie simpliciale (ceci est une généralisation du fait que tout H_∞-espace est équivalent à un groupe simplicial). En réalité, les théories homotopiques des catégories simpliciales et des catégories de Segal sont équivalentes (voir le paragraphe *Strictification* de [16]). Le lecteur pourra donc en première approximation remplacer mentalement les 1-catégories de Segal par des catégories simpliciales. Cependant, un avantage de nature technique des 1-catégories de Segal est que l'on peut définir des Hom internes en un sens dérivé (voir §1.2), qui seront notés par la suite $\mathbb{R}\underline{Hom}$[2].

Revenons à notre foncteur fibre $\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Top$, qui sera alors considéré comme un objet dans la 1-catégorie de Segal $\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top)$. L'ensemble simplicial des endomorphismes de cet objet sera noté $\mathbb{R}End(\omega_x)$. L'ensemble simplicial $\mathbb{R}End(\omega_x)$ vient avec une loi de composition induite par la composition des endomorphismes qui le munit d'une structure naturelle de H_∞-espace.

La preuve dans ses grandes lignes

Nous sommes maintenant en mesure de suivre pas à pas la preuve de l'isomorphisme $\pi_1(X, x) \simeq End(\omega_x^0)$ présentée précédemment.

Nous commencerons par généraliser la classification des faisceaux localement constants par leur monodromie au cas des champs localement constants définis plus haut. Cette classification se fera en deux grandes étapes. Tout d'abord, nous montrerons que la 1-catégorie de Segal $Loc(X)$, des champs localement constants sur X est équivalente à la 1-catégorie de Segal $Fib(S(X))$, des fibrations sur l'ensemble simplicial des simplexes singuliers de X (voir Thm. 2.13). Cette équivalence peut être comprise comme un analogue du fait que la catégorie des faisceaux localement constants est équivalente à celles des revêtements. Par la suite, nous noterons G le groupe simplicial des lacets sur $S(X)$ de base x (i.e. un groupe simplicial G faiblement équivalent au H_∞-espace $\Omega_x X$), et nous considérerons la 1-catégorie de Segal $G - Top$ des ensembles simpliciaux munis d'une action de G (voir Def. 2.20). Nous montrerons alors que la 1-catégorie de Segal $Fib(S(X))$ est équivalente à $G - Top$, la conclusion étant que $Loc(X)$ est elle même équivalente à $G - Top$ (voir Thm. 2.22). Cette dernière équivalence est l'analogue final de la classification des faisceaux localement constants par leur monodromie (i.e. de l'équivalence entre faisceaux localement constants et $\pi_1(X, x)$-ensembles). De plus, le foncteur fibre $\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Top$ sera alors transformé en le foncteur d'oubli $\omega_G : G - Top \longrightarrow Top$, ce qui implique que le H_∞-espace $\mathbb{R}End(\omega_x)$ est faiblement équivalent à $\mathbb{R}End(\omega_G)$.

Pour achever la démonstration, nous remarquerons que le foncteur ω_G est co-représentable (au sens des 1-catégories de Segal) par l'objet de $G - Top$ défini par l'action de G sur lui-même. La

[2]Lorsque A et B sont deux catégories simpliciales, les objets de $\mathbb{R}\underline{Hom}(A, B)$ peuvent être légitimement perçus comme des foncteurs simpliciaux *faibles* entre A et B

version 1-catégorie de Segal du lemme de Yoneda impliquera alors l'existence d'une équivalence faible d'ensembles simpliciaux

$$\mathbb{R}End(\omega_x) \simeq \mathbb{R}End(\omega_G) \simeq G \simeq \Omega_x X,$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Remarquons pour terminer l'équivalence faible de notre théorème $\Omega_x X \simeq \mathbb{R}End(\omega_x)$, peut alors être comprise comme induite par l'action de la monodromie des lacets de X sur les fibres des champs localement constants. Ainsi, intuitivement parlant, un lacet γ sur X correspond dans $\mathbb{R}End(\omega_x)$ à l'endomorphisme de ω_x donné par la monodromie $[\gamma]$ le long de γ, une homotopie entre deux lacets γ et γ' correspond à l'homotopie entre les endomorphismes $[\gamma]$ et $[\gamma']$ donnée par une certaine *monodromie sur un pavé de dimension* 2 ... et ainsi de suite, tout cela de façon compatible avec la composition des lacets et la composition des endomorphismes.

Organisation du travail

Dans une première partie nous avons rappelé un certain nombre de définitions et de résultats préliminaires qui nous seront utiles tout au long de l'article. Il comporte en particulier les notations et définitions concernant les H_∞-espaces, les 1-catégories de Segal et la localisation de Dwyer-Kan.

La seconde partie est consacrée à la démonstration des résultats de classification des champs localement constants, et est le coeur du travail. Les preuves utilisent le formalisme des catégories de modèles et des adjonctions de Quillen afin de construire des équivalences entre les différentes 1-catégories de Segal qui entrent en jeu.

Enfin, dans une dernière partie nous rassemblons les résultats précédemment démontrés et en déduisons le théorème principal.

Relations avec d'autres travaux

Dans la lettre à L. Breen, datée du 17/02/1975 et que l'on trouve dans [8], A. Grothendieck conjecture plusieurs relations entre la théorie des n-champs en groupoïdes et la théorie de l'homotopie. Bien qu'utilisant un language très différent, ces considérations ont été une source d'inspiration lors de l'élaboration de ce travail (voir la remarque qui suit le corollaire 3.2).

Signalons aussi que le corollaire 3.2 avait été énoncé sans démonstration dans l'introduction de [18], et sert déjà depuis quelques temps de point de départ au formalisme Tannakien supérieur qui y est proposé.

Notations et conventions

Pour tout univers $\mathbb{U}$ nous noterons $Ens_{\mathbb{U}}$ (resp. $SEns_{\mathbb{U}}$, resp. $Es_{\mathbb{U}}$, resp. ...) la catégorie des ensembles (resp. des ensembles simpliciaux, resp. des espaces topologiques, resp. ...) appartenant à $\mathbb{U}$. Lorsque le contexte ne nécessitera qu'un unique univers, nous omettrons de le mentionner, et nous écrirons simplement Ens, $SEns$, Es, ...

Nous utiliserons l'abréviation *cmf* pour signifier *catégorie de modèles fermée*, et pour nous cette expression fera toujours référence à la notion exposée dans [9, §1.1.3] (en particulier, nos cmf possèderons toujours tout type de limites et colimites ainsi que des factorisations fonctorielles). L'expression *équivalence* sera synonyme d'*équivalence faible*, et fera référence à une structure de catégorie de modèles.

Pour une cmf M, et X un de ses objets, nous noterons M/X (resp. X/M) la cmf des objets au-dessus (resp. au-dessous) de X. Nous noterons aussi $*$ l'objet final d'une cmf M (choisit une bonne fois pour toute), et $*/M$ la cmf des objets pointés de M. Nous utiliserons généralement la notation Hom_* pour désigner les morphismes d'objets pointés. La catégorie homotopique d'une cmf M sera notée $Ho(M)$.

Un foncteur $F : M \longrightarrow N$ entre deux cmf sera de Quillen à droite (resp. à gauche) si c'est un adjoint à droite (resp. à gauche) et s'il présèrve les fibrations et les fibrations triviales (resp. les cofibrations et les cofibrations triviales). Si $F : M \longrightarrow N$ est un foncteur de Quillen à droite entre deux cmf, d'adjoint à gauche $G : N \longrightarrow M$, nous noterons

$$\mathbb{R}F : Ho(M) \longrightarrow Ho(N) \qquad \mathbb{L}G : Ho(N) \longrightarrow Ho(M)$$

leurs foncteurs dérivés à droite et à gauche ([9, §1.3]).

Nous utiliserons aussi la notion de cmf simpliciale de [9, §4.2.18]. Si N est une cmf simpliciale, et si $\underline{Hom}$ désigne ses ensembles simpliciaux de morphismes, nous noterons $\mathbb{R}\underline{Hom}$ ses Hom dérivés à valeurs dans $Ho(SEns)$ (voir [9, §4.3.4]). Rappelons qu'ils sont définis pour deux objets X et Y de $Ho(M)$, par $\mathbb{R}\underline{Hom}(X,Y) := \underline{Hom}(QX, RY) \in Ho(SEns)$, où QX (resp. RY) est un modèle cofibrant (resp. fibrant) de X (resp. de Y). Ceux-ci munissent la catégorie $Ho(M)$ d'une structure de $Ho(SEns)$-modules fermé au sens de [9, §4.1.13] (i.e. $Ho(M)$ est enrichie dans $Ho(SEns)$ et possède des produits externes ainsi que des objets exponentiels par des objets de $Ho(SEns)$).

Nous noterons comme il est en l'usage Δ la catégorie simpliciale standard. Ses objets sont les ensembles finis ordonnés $[m] := \{0, \dots, m\}$, et ses morphismes les morphismes croissants au sens large. Nous supposerons toujours que les univers considérés contiennent Δ.

Enfin, comme nous l'avons déjà signalé au cours de cette introduction, l'expression *catégorie simpliciale* fera toujours référence à la notion de catégorie enrichie dans les ensembles simpliciaux. Il s'agit donc de la notion utilisée dans [4] et [5, §XII] (sous le nom de *S-catégorie*), et non de la notion plus générale d'objet simplicial dans la catégorie des catégories.

1 Préliminaires

Dans ce premier chapitre on rappelle plusieurs définitions et résultats qui nous seront utiles tout au long de ce travail. Il s'agit pour la plupart de notion standard et le lecteur est invité à considérer cette partie comme une annexe de notations et de références.

1.1 Espaces topologiques, ensembles simpliciaux, groupes simpliciaux et Δ^o-espaces

Commençons par rappeler que les catégories Es des espaces topologiques et $SEns$ des ensembles simpliciaux sont des cmf simpliciales (voir [9, §4.2.18]). Rappelons que les équiavlences dans Es et $SEns$ sont par définition les équivalences faibles (i.e. les morphismes induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie). De plus, il existe deux foncteurs (voir [9, §3.6.7])

$$|.| : SEns \longrightarrow Es \qquad S : Es \longrightarrow SEns,$$

définissant une équivalence de Quillen entre les cmf Es et $SEns$. Notons au passage que le foncteur $|.|$ est compatible avec la structure simpliciale (i.e. commute avec les produits externes par des ensembles simpliciaux).

Définition 1.1 *Un pré-Δ^o-espace est un foncteur*

$$\begin{array}{cccc} A: & \Delta^o & \longrightarrow & SEns \\ & [m] & \mapsto & A_m \end{array}$$

tel que $A_0 = *$.

La catégorie des pré-Δ^o-espaces sera notée $Pr\Delta^o - SEns$.

Comme $[0]$ est initial dans Δ^o, on peut identifier la catégorie $Pr\Delta^o - SEns$ avec la catégorie des préfaisceaux sur $\Delta - [0]$ à valeurs dans $*/SEns$. Comme $*/SEns$ est une cmf engendrée par cofibrations on peut appliquer [7, §II.6.9] et munir $Pr\Delta^o - SEns$ d'une structure de cmf. Rappelons que les fibrations (resp. les équivalences) pour cette structure sont les morphismes $f : A \longrightarrow B$ tels que pour tout $[m] \in \Delta$, le morphisme induit $f_m : A_m \longrightarrow B_m$ soit une fibration (resp. une équivalence). Rappelons que d'après nos conventions *équivalence* signifie *équivalence faible.*

Soit $[m] \in \Delta$. On dispose de m morphismes

$$p_i : [1] \longrightarrow [m] \qquad 0 \leq i < m,$$

définis par $p_i(0) = i$ et $p_i(1) = i + 1$. Ceci permet de définir pour tout $A \in Pr\Delta^o - SEns$ et $[m] \in \Delta$ un morphisme (dit *morphisme de Segal*), $\prod p_i : A_m \longrightarrow A_1^m$.

Définition 1.2 *Un objet A de $Pr\Delta^o - SEns$ est appelé un Δ^o-espace si pour tout $[m] \in \Delta$ le morphisme de Segal, $A_m \longrightarrow A_1^m$, est une équivalence dans $SEns$.*

Pour $X \in SEns$ notons $\pi_0(X)$ l'ensemble des ses composantes connexes. Comme le foncteur $\pi_0(-)$ transforme équivalences en isomorphismes et commute avec les produits directs, pour tout Δ^o-espace A, $\pi_0(A_1)$ est naturellement muni d'une loi de composition associative et unitaire. C'est donc un monoïde.

Définition 1.3 *Un objet A de $Pr\Delta^o - SEns$ est appelé un H_∞-espace si c'est une Δ^o-espace et si de plus le monoïde $\pi_0(A_1)$ est un groupe.*

On notera $H_\infty - SEns$ la sous-catégorie pleine de $Pr\Delta^o - SEns$ formée des H_∞-espaces.

Remarquer que les notions de Δ^o-espaces et de H_∞-espaces sont invariantes par équivalences. Ainsi les propriétés d'être un Δ^o-espace ou un H_∞-espace sont stables par isomorphismes dans la catégorie homotopique $Ho(Pr\Delta^o - SEns)$.

Pour un objet $A \in Pr\Delta^o - SEns$ on définit sa diagonale

$$\begin{array}{rccc} d(A) : & \Delta^o & \longrightarrow & Ens \\ & [m] & \mapsto & (A_m)([m]), \end{array}$$

qui est un ensemble simplicial. De plus, comme $A_0 = *$, $d(A)$ est réduit (i.e. $d(A)([0]) = *$) et en particulier peut-être considéré sans ambiguité comme un objet de $*/SEns$ (i.e. un ensemble simplicial pointé). Ceci définit évidemment un foncteur

$$d : Pr\Delta^o - SEns \longrightarrow */SEns.$$

En composant avec le foncteur de réalisation géométrique on obtient un foncteur classifiant

$$B := |d(-)| : Pr\Delta^o - SEns \longrightarrow */Es.$$

Il est bien connu que le foncteur B préserve les équivalences, et induit donc un foncteur sur les catégories homotopiques

$$B : Ho(Pr\Delta^o - SEns) \longrightarrow Ho(*/Es).$$

Théorème 1.4 *([12]) Le foncteur B est de Quillen à gauche d'adjoint à droite*

$$\Omega_* : */Es \longrightarrow Pr\Delta^o - SEns.$$

De plus, pour tout $X \in */Es$, $\mathbb{R}\Omega_*(X)$ est un H_∞-espace, et le morphisme d'adjonction

$$B\mathbb{R}\Omega_* X \simeq B\mathbb{R}\Omega_* X \longrightarrow X$$

est un isomorphisme dans $Ho(*/Es)$ lorsque X est connexe par arcs.

En particulier, le foncteur $B : Ho(H_\infty - SEns) \longrightarrow Ho(*/Es)$ est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des espaces pointés connexes par arcs.

Pour mémoire rappelons que $\Omega_*(X,x)$ est le H_∞-espace des lacets de base x sur X, et est défini par

$$\begin{array}{rccc} \Omega_*(X,x) : & \Delta^o & \longrightarrow & SEns \\ & [m] & \mapsto & \underline{Hom}_*(\Delta^m_*, X) \end{array}$$

où Δ^m_* est obtenu à partir de Δ^m en identifiant tous ses sommets en un point unique. En d'autres termes, $\Omega_*(X,x)_m$ est l'ensemble simplicial des morphismes $\Delta^m \longrightarrow X$ qui envoient tous les sommets de Δ^m sur le point x.

Notons SGp la catégorie des groupes simpliciaux (i.e. des objets en groupes dans $SEns$, ou encore des objets simpliciaux dans la catégorie des groupes). Rappelons que c'est une cmf où les fibrations (resp. les équivalences) sont les morphismes induisant une fibration (resp. une équivalence) sur les ensembles simpliciaux sous-jacents (voir [7, $\S II.5.2$]).

Il existe une inclusion naturelle

$$\begin{array}{cccc} j: & SGp & \longrightarrow & Pr\Delta^o - SEns \\ & G & \mapsto & ([m] \mapsto G^m), \end{array}$$

où les faces et les dégénérescences sont induites par les multiplications et les diagonales. Le foncteur j identifie SGp avec la sous-catégorie pleine de $Pr\Delta^o - SEns$ formée des objets A pour lesquels les morphismes de Segal sont des isomorphismes, et tels que la composition $A_1 \times A_1 \longrightarrow A_1$ fasse de A_1 un groupe simplicial. Ainsi, tout groupe simplicial sera considére implicitement comme un objet de $Pr\Delta^o - SEns$. De plus, le foncteur j possède un adjoint à gauche, $Str : Pr\Delta^o - SEns \longrightarrow SGp$, qui à un pré-$\Delta^o$-espace X associe le groupe simplicial qu'il engendre. Comme j est clairement de Quillen à droite, le foncteur Str est de Quillen à gauche.

Proposition 1.5 *Le foncteur $j \simeq \mathbb{R}j : Ho(SGp) \longrightarrow Ho(Pr\Delta^o - SEns)$ est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des H_∞-espaces.*

Preuve: En utilisant le théorème 1.4, il suffit de montrer que le foncteur $d : Ho(SGp) \longrightarrow Ho(*/SEns)$ est pleinement fidèle et son image essentielle formée des objets connexes.

Pour $G \in SGp$, notons EG la diagonale de l'ensemble bi-simplicial $([m],[p]) \mapsto G_p^{m+1}$. C'est donc le nerf du morphisme d'ensembles simpliciaux $G \longrightarrow *$, et est donc contractile et fibrant. De plus, EG possède une action naturelle de G. Plus précisément, le groupe G_m opère diagonalement sur $EG_m = G_m^{m+1}$ par son action à gauche. On vérifie alors facilement que $d(G)$ est naturellement isomorphe au quotient de EG par G. On peut alors utiliser le théorème [7, $\S V.3.9$] pour montrer que $d(G)$ est naturellement isomorphe dans $Ho(*/SEns)$ à $\overline{W}G$ défini dans [7, $\S V.4$]. En d'autres termes les foncteurs $d : Ho(SGp) \longrightarrow Ho(*/SEns)$ et $\overline{W} : Ho(SGp) \longrightarrow Ho(*/SEns)$ sont isomorphes. Or, d'après le corollaire [7, $\S V.6.4$], le foncteur $\overline{W}$ est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des objets connexes. $\square$

Notons $Ho(*/SEns)_c$ la sous-catégorie pleine de $Ho(*/SEns)$ formée des objets connexes. On peut construire un inverse de l'équivalence $d : Ho(SGp) \longrightarrow Ho(*/SEns)_c$ de la façon suivante. On commence par considérer le foncteur $d : Pr\Delta^o - SEns \longrightarrow */SEns$, qui envoie un objet $X \in Pr\Delta^o - SEns$ sur sa diagonale. Ce foncteur possède un adjoint à droite $L_* : */SEns \longrightarrow Pr\Delta^o - SEns$ défini de la même façon que le foncteur Ω_*. En clair, on a pour $(S,s) \in */SEns$

$$\begin{array}{cccc} L_*(S,s): & \Delta^o & \longrightarrow & SEns \\ & [m] & \mapsto & \underline{Hom}_*(\Delta_*^m, X). \end{array}$$

Le foncteur L_* étant clairement de Quillen à droite, d est un foncteur de Quillen à gauche. On obtient donc une adjonction sur les catégories homotopiques

$$\mathbb{L}d : Ho(Pr\Delta^o - SEns) \longrightarrow Ho(*/SEns)$$

$$\mathbb{R}L_* : Ho(*/SEns) \longrightarrow Ho(Pr\Delta^o - SEns).$$

On vérifie alors aisément à l'aide du théorème 1.4 et de la proposition 1.5 que le foncteur

$$G := \mathbb{L}Str \circ \mathbb{R}L_* : Ho(*/SEns)_c \longrightarrow Ho(SGp)$$

est un inverse du foncteur d.

1.2 1-Catégories de Segal

La notion de 1-catégorie (resp. 1-précatégorie) de Segal est une notion afaiblie de celle de catégorie simpliciale, de la même façon que la notion de Δ^o-espace (resp. pré-Δ^o-espace) est une notion afaiblie de celle de monoïde simplicial. Tout comme pour le cas des catégories simpliciales (voir [5, §XII]), il existe une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des 1-précatégorie de Segal où les équivalences sont une certaine généralisation de la notion d'équivalence de catégories. De plus, on sait que la théorie homotopique des 1-catégories de Segal est équivalente à celle des catégories simpliciales (voir par exemple [16]). La propriété qui nous intéresse tout particulièrement est que la catégorie de modèles de 1-précatégories de Segal est une cmf *interne* (voir Thm. 1.7), propriété qui n'est plus vraie pour la cmf des catégories simpliciales. Cette propriété nous permettra de définir des Hom internes dérivés entre 1-catégories de Segal qui seront des objets de toute importance par la suite (ils sont par exemple déjà utilisés pour énoncer notre théorème principal).

Définition 1.6 • *Une 1-précatégorie de Segal est la donnée d'un foncteur*

$$\begin{array}{rccc} A: & \Delta^o & \longrightarrow & SEns \\ & [p] & \mapsto & A_p \end{array}$$

tel que A_0 soit un ensemble simplicial constant, appelé l'ensemble d'objets de A.

- *Un morphisme entre 1-précatgories de Segal est une transformation naturelle entre foncteurs de Δ^o vers $SEns$.*
- *Une 1-précatégorie de Segal A est une 1-catégorie de Segal si pour tout $[p]$ le morphisme de Segal*
$$A_p \longrightarrow A_1 \times_{A_0} A_1 \times \cdots \times_{A_0} A_1$$
est une équivalence d'ensembles simpliciaux.
- *Pour toute 1-catégorie de Segal A on définit sa catégorie homotopique $Ho(A)$ comme la catégorie ayant A_0 comme ensemble d'objets, et $\pi_0(A_1)$ comme ensemble de morphismes.*
- *Un morphisme de 1-catégories de Segal $f : A \longrightarrow B$ est une équivalence s'il vérifie les deux conditions suivantes.*
    1. *Pour tout $[p] \in \Delta^o$, le morphisme $f_p : A_p \longrightarrow B_p$ est une équivalence d'ensembles simpliciaux.*
    2. *Le morphisme induit $Ho(f) : Ho(A) \longrightarrow Ho(B)$ est une équivalence de catégories.*

La catégorie des 1-précatégories de Segal sera notée $1 - PrCat$.

Pour une 1-précatégorie de Segal A, et $(x, y) \in A_0^2$ une paire d'objets, on notera $A_{(x,y)}$ le sous-ensemble simplicial de A_1 des objets de source x et but y ([14, p. 17]). Remarquons alors que l'on a

$$A_1 = \coprod_{(x,y)\in A_0^2} A_{(x,y)}.$$

Il nous arrivera très souvent de définir une 1-catégorie de Segal par un ensemble d'objets A_0, des ensembles simpliciaux $A_{(x,y)}$ pour tout $(x, y) \in A_0^2$, et des compositions (associatives et unitaires)

$$A_{(x,y)} \times A_{(y,z)} \longrightarrow A_{(x,z)}.$$

C'est à dire comme une catégorie enrichie dans $SEns$ (i.e. une catégorie simpliciale). L'objet A_p est alors défini par

$$A_p := \coprod_{(x_0,\dots,x_p)\in A_0^{p+1}} A_{(x_0,x_1)} \times A_{(x_1,x_2)} \times \cdots \times A_{(x_{p-1},x_p)}.$$

Remarquons que cette construction permet d'identifier la catégorie des catégories simpliciales à la sous-catégorie pleine de $1-PrCat$ formée des objets dont les morphismes de Segal sont des isomorphismes. Il existe donc un foncteur pleinement fidèle $S-Cat \longrightarrow 1-PrCat$, où $S-Cat$ est la catégorie des catégories simpliciales. A l'aide de cette inclusion, on verra toute catégorie simpliciale comme un objet de $1-PrCat$. Il est important de noter, mais nous n'utiliserons pas ceci par la suite, que cette inclusion induit une équivalence sur les catégories homotopiques (voir par exemple le paragraphe *Strictification* of [16, p. 7]). En particulier, ceci implique que toute 1-catégorie de Segal est équivalente à une catégorie simpliciale.

Si M est une cmf simpliciale, on peut former la catégorie simpliciale des objets cofibrants et fibrants dans M. On la considérera alors comme un objet de $1-PrCat$, que l'on notera $E(M)$. Remarquer qu'il existe une équivalence naturelle de catégories $Ho(E(M)) \simeq Ho(M)$ (où le membre de gauche est la catégorie homotopique au sens de de la définition 1.6, et celui de droite la catégorie obtenu en localisant M le long des équivalences).

Supposons maintenant que $F : M \longrightarrow N$ soit un foncteur de Quillen à droite entre deux cmf simpliciales, préservant les objets cofibrants. Notons $G : N \longrightarrow M$ son adjoint à gauche, et supposons que G soit un foncteur simplicial (i.e. de catégories en modules sur $SEns$). Alors par adjonction on dispose de morphimes dans $SEns$, fonctoriels en A et B

$$Hom(A,B) \longrightarrow Hom(F(A),F(B)).$$

Ceci permet alors de définir un foncteur simplicial de catégories simpliciales

$$E(F) : E(M) \longrightarrow E(N),$$

qui est considéré comme un morphisme dans $1-PrCat$.

De même, si $G : M \longrightarrow N$ est de Quillen à gauche et simplicial entre deux cmf simpliciales, et si de plus il préserve les objets fibrants, alors il induit un morphisme dans $1-PrCat$

$$E(G) : E(M) \longrightarrow E(N).$$

Théorème 1.7 *([14, 17]) La catégorie $1-PrCat$ est munie d'une structure de cmf, où les cofibrations sont les monomorphismes, et les objets fibrants sont des 1-catégories de Segal. De plus, un morphisme entre deux 1-catégories de Segal est une équivalence dans $1-PrCat$ si et seulement si c'est une équivalence de 1-catégories de Segal (au sens de la définition 1.6).*

Enfin, $1-PrCat$ est une cmf interne (i.e. monoidale symétrique pour le produit direct, au sens de [9, §4.2]).

La dernière assertion implique l'existence de Hom internes

$$\underline{Hom}(-,-) : 1-PrCat^o \times 1-PrCat \longrightarrow 1-PrCat,$$

satisfaisant à la formule d'adjonction usuelle

$$Hom(A\times B,C) \simeq Hom(A,\underline{Hom}(B,C)),$$

et qui sont compatibles avec la structure de catégorie de modèles. En particulier, ils peuvent être dérivés comme il est expliqué dans [9, §4.3.2]. Ainsi, la catégorie homotopique $Ho(1-PrCat)$ devient alors une catégorie avec Hom internes. Rappelons qu'ils sont définis explicitement pour $A, B \in 1-PrCat$ par la formule suivante

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(A,B) := \underline{Hom}(A,B') \in Ho(1-PrCat),$$

où $B \longrightarrow B'$ est un modèle fibrant, et qu'ils vérifient la formule d'adjonction

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(A \times B, C) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(A, \mathbb{R}\underline{Hom}(B,C)).$$

Enfin, l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $Ho(\mathbb{R}\underline{Hom}(A,B))$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes entre A et B dans $Ho(1-PrCat)$ ([14, §2]).

Définition 1.8 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme entre deux 1-catégories de Segal. On dit que f est pleinement fidèle si pour tout $(x,y) \in A_0^2$ le morphisme induit*

$$f_{x,y} : A_{(x,y)} \longrightarrow B_{(f(x),f(y))}$$

est une équivalence dans $SEns$.

Soit $f : A \longrightarrow B$ dans $Ho(1-PrCat)$. On dira que f est pleinement fidèle si un représentant $f : A \longrightarrow B'$, où $B \longrightarrow B'$ est un modèle fibrant, est pleinement fidèle.

Remarquer que dans la définition précédente on utilise le fait qu'un objet fibrant de $1-PrCat$ est automatiquement une 1-catégorie de Segal.

D'après [15, §5] il existe pour tout $A \in Ho(1-PrCat)$ une famille des flèches (qui est un morphisme dans $Ho(1-PrCat)$)

$$Ar_A : A^o \times A \longrightarrow Top,$$

où $Top = LSEns$ est la localisation de Dwyer-Kan de la cmf des ensembles simpliciaux (voir le paragraphe suivant). On peut par exemple définir ce morphisme en utilisant que A est isomorphe dans $Ho(1-PrCat)$ à une catégorie simpliciale, et en utilisant le morphisme de Yoneda enrichie pour les catégories simpliciales. Par adjonction ce morphisme induit deux nouveaux morphismes dans $Ho(1-PrCat)$

$$h : A \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(A^o, Top)$$

$$k : A^o \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(A, Top).$$

Le lemme de Yoneda pour les 1-catégories de Segal est le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.9 *([16, Thm. 2]) Pour tout $A \in Ho(1-PrCat)$ les morphismes h et k sont pleinement fidèles.*

Remarquons que la notion de 1-précatégorie de Segal est une généralisation de celle de pré-Δ^o-espace (qui correspond au cas où $A_0 = *$). Plus précisément, il existe un foncteur évident

$$B : Pr\Delta^o - SEns \longrightarrow */1-PrCat,$$

qui identifie $Pr\Delta^o - SEns$ avec la sous-catégorie pleine formée des objets A tels que $A_0 = *$. Il est facile de voir qu'il possède un adjoint à droite

$$\Omega_* : */1 - PrCat \longrightarrow Pr\Delta^o - SEns.$$

Pour un objet pointé $(A, a) \in */1 - PrCat$ il est défini explicitement de la façon suivante

$$\begin{array}{cccc} \Omega_a(A) : & \Delta^o & \longrightarrow & SEns \\ & [m] & \mapsto & A_{\underbrace{(a, a, \dots, a)}_{m+1\ fois}}. \end{array}$$

D'après [17, §3.11] il est évident que le foncteur B est de Quillen à gauche, et donc que Ω_* est de Quillen à droite. On en déduit donc un foncteur dérivé

$$\mathbb{R}\Omega_* : Ho(*/1 - PrCat) \longrightarrow Ho(Pr\Delta^o - SEns).$$

En utilisant le fait qu'un objet fibrant de $1 - PrCat$ est automatiquement une 1-catégorie de Segal, on remarque que $\mathbb{R}\Omega_*$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine des Δ^o-espaces.

Définition 1.10 *Soit $A \in Ho(1 - PrCat)$, et f un objet de $\mathbb{R}\underline{Hom}(A, Top)$. On définit le Δ^o-espace des endomorphismes de f par*

$$\mathbb{R}\underline{End}(f) := \mathbb{R}\Omega_f(\mathbb{R}\underline{Hom}(A, Top)) \in Ho(Pr\Delta^o - SEns).$$

1.3 Localisation de Dwyer-Kan

Soit C une catégorie, et S un ensemble de morphismes. D'après [4] il existe une catégorie simpliciale $L(C, S)$, qui dépend fonctoriellement du couple (C, S), et telle que la catégorie homotopique de $L(C, S)$ soit équivalente à la catégorie localisée $S^{-1}C$. Pour tout foncteur $F : (C, S) \longrightarrow (D, T)$ (i.e. un foncteur $F : C \longrightarrow D$ qui envoit S dans T) nous noterons $LF : L(C, S) \longrightarrow L(D, T)$ le morphisme induit dans $1 - PrCat$. D'un point de vue ensembliste remarquons que si $\mathbb{U}$ est un univers et C une catégorie avec $C \in \mathbb{U}$, alors pour tout ensemble S de morphismes de C, $L(C, S)$ appartient encore à $\mathbb{U}$.

Lorsque C est une cmf et que S est l'ensemble des équivalences nous écrirons simplement LC pour $L(C, S)$. De même, pour toute sous-catégorie pleine C d'une cmf M, nous écrirons LC pour $L(C, Equiv. \cap C)$, où $Equiv.$ est l'ensemble des équivalences de M.

Les trois propriétés fondamentales que nous utiliserons implicitement sont les suivantes.

- Si $F : (C, S) \longrightarrow (D, T)$ et $G : (D, T) \longrightarrow (C, S)$ sont deux foncteurs tels qu'il existe des diagrammes de transformations naturelles

  $$Id \longrightarrow A \longleftarrow FG \qquad GF \longleftarrow B \longrightarrow Id$$

  qui sont objet par objet des morphismes de T et de S, alors LF et LG sont inverses l'un de l'autre dans $Ho(1 - PrCat)$ (voir [14, §8.1]). En particulier, si M^c est la catégorie des objets cofibrants dans une cmf M, alors le morphisme naturel

  $$LM^c \longrightarrow LM,$$

  est un isomorphisme dans $Ho(1 - PrCat)$. En effet, le foncteur de remplacement cofibrant $Q : M \longrightarrow M^c$ induit un morphisme inverse dans $Ho(1 - PrCat)$, $LQ : LM \longrightarrow LM^c$ ([9,

§1.1]). De même, si M^f est la catégorie des objets fibrants dans M, alors le morphisme naturel

$$LM^f \longrightarrow LM$$

est un isomorphisme dans $Ho(1-PrCat)$. Ou encore, si M^{cf} est la sous-catégorie pleine des objets fibrants et cofibrants de M, le morphisme naturel

$$LM^{cf} \longrightarrow LM,$$

est un isomorphisme dans $Ho(1-PrCat)$.

- Soit M une cmf simpliciale, et $E(M)$ la catégorie simpliciale des objets fibrants et cofibrants de M. Alors il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(1-PrCat)$

  $$E(M) \simeq LM.$$

  Soit $G : M \longrightarrow N$ un foncteur de Quillen à gauche et simplicial entre deux cmf simpliciales, préservant les objets fibrants et les équivalences. Alors il existe un isomorphisme dans $Ho(*/1-PrCat)$

  $$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LM, LN), LG) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(E(M), E(N)), E(G)).$$

  De même, si $F : M \longrightarrow N$ est de Quillen à droite avec un adjoint à gauche simplicial, et s'il préserve les objets cofibrants et les équivalences, alors il existe un isomorphisme dans $Ho(*/1-PrCat)$

  $$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LM, LN), LF) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(E(M), E(N)), E(F)).$$

- Si M_0 est une sous-catégorie pleine d'une cmf M, qui est stable par équivalence (i.e. tout objet de M isomorphe dans $Ho(M)$ à un objet de M_0 est dans M_0), alors le morphisme $LM_0 \longrightarrow LN$ est pleinement fidèle (au sens de la définition 1.8).

Remarquons que la seconde propriété permet d'associer à tout foncteur de Quillen à droite entre deux cmf $F : M \longrightarrow N$, un morphisme $LF : LM^f \longrightarrow LN^f$, ou encore un objet

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LM^f, LN^f), LF) \in Ho(*/1-PrCat).$$

En effet, d'après [9, §1.1.12] le foncteur $F : M^f \longrightarrow N^f$ préserve les équivalences. Mais comme $LM^f \simeq LM$ et $LN^f \simeq LN$ ceci détermine un objet bien défini à isomorphisme unique près

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LM, LN), LF) \in Ho(*/1-PrCat).$$

De même, si $G : M \longrightarrow N$ est de Quillen à gauche on en déduit un objet

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LM, LN), LG) \in Ho(*/1-PrCat).$$

Il est important de remarquer qu'un foncteur de Quillen à droite (resp. à gauche) $F : M \longrightarrow N$ qui est une équivalence de Quillen induit un isomorphisme dans $Ho(1-PrCat)$, $LF : LM \longrightarrow LN$. De plus, si G est l'adjoint à gauche (resp. à droite) de F, alors LG est l'inverse de LF.

Terminons par l'étude d'un cas particulier dans lequel on peut calculer le Δ^o-espace des endomorphismes d'un morphisme $A \longrightarrow Top$ à l'aide du lemme de Yoneda. Cet exemple nous sera très utile lors de la preuve du théorème principal.

Supposons que $F : M \longrightarrow SEns$ soit un foncteur de Quillen à droite, où M est une cmf simpliciale, et que son adjoint à gauche $G : SEns \longrightarrow M$ préserve la structure simpliciale. On a vu que l'on pouvait construire un morphisme dans $1 - PrCat$

$$E(F) : E(M) \longrightarrow E(SEns).$$

Supposons que G préserve les objets fibrants, et notons $X = G(*) \in E(M)$. Par adjonction, on a $F(Y) = \underline{Hom}(X, Y)$, où $\underline{Hom}$ est le Hom simplicial de M. A l'aide de la description de $Ar_{E(M)}$ ([15, §5.6]) cela implique facilement que l'objet X est envoyé par k sur l'image de $E(F)$ dans $\mathbb{R}\underline{Hom}(A, E(SEns))$. On obtient donc un morphisme dans $Ho(*/1 - PrCat)$

$$k : (E(M)^o, X) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(E(M), E(SEns)), E(F)).$$

D'après le lemme de Yoneda 1.9 et la définition de pleinement fidèle, on en déduit que le morphisme induit dans $Ho(Pr\Delta^o - SEns)$

$$\mathbb{R}\Omega_X(E(M))^o \longrightarrow \mathbb{R}\Omega_{E(F)}(\mathbb{R}\underline{Hom}(E(M), E(SEns)))$$

est un isomorphisme. Enfin, il est clair que $\mathbb{R}\Omega_X(E(M))^o$ est isomorphe à $\underline{Hom}(X, X)^o$, le monoïde simplicial opposé des endomorphismes de X dans M. En appliquant les propriétés de la localisation de Dwyer-Kan rappelées ci-dessus on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.11 *Soit $F : M \longrightarrow SEns$ un foncteur de Quillen à droite préservant les équivalences. On suppose que son adjoint à gauche G préserve la structure simpliciale et les objets fibrants. Soit $X = G(*) \in M$. Alors, il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(Pr\Delta^o - SEns)$*

$$\underline{Hom}(X, X)^o \simeq \mathbb{R}\underline{End}(LF).$$

2 Classifications des champs localement constants

Ce chapitre est essentiellement composé de trois parties. Dans un premier temps nous définirons la 1-catégorie de Segal $Loc(X)$, des champs localement constants sur un CW complexe X, ainsi que son foncteur fibre en $x \in X$, ω_x. Nous introduirons ensuite la 1-catégorie de Segal $Fib(S)$, des fibrations sur un ensemble simplicial S. Par des techniques d'algèbre homotopique nous montrerons que $Loc(X)$ est naturellement équivalente à $Fib(S(X))$, où $S(X)$ est l'ensemble simplicial singulier de X (voir le théorème 2.13). De plus, cette équivalence est compatible aux foncteurs fibres. C'est ce que nous résumons en affirmant que *les champs localement constants sur X sont classifiés par les fibrations sur $S(X)$*. Ceci suppose connue l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée sur les préfaisceaux simpliciaux sur X pour laquelle les équivalences sont les équivalences fibre à fibre. Nous avons choisi de travailler avec la structure projective de [14, §5] et [2] car ceci permet d'utiliser qu'une certaine adjonction est de Quillen (voir la proposition 2.9), ce qui n'est plus vrai pour la structure définie par J. F. Jardine dans [10]. Enfin, nous définirrons pour tout groupe simplicial G la 1-catégorie de Segal de ses représentations, $G - Top$. Le second théorème de classification affirme alors que la 1-catégorie de Segal $G - Top$ est naturellement équivalente à $Fib(d(G))$, où $d(G)$ est l'ensemble simplicial classifiant du groupe simplicial G (voir le théorème 2.22).

2.1 Champs localement constants

Fixons $\mathbb{U}$ un univers avec $\Delta \in \mathbb{U}$, et $\mathbb{V}$ un univers avec $\mathbb{U} \in \mathbb{V}$. Nous noterons $Es_{\mathbb{U}}^{cw}$ la sous-catégorie pleine de $Es_{\mathbb{U}}$ formée des CW complexes. Remarquons que les objets de $Es_{\mathbb{U}}^{cw}$ sont tous localement contractiles et héréditairement paracompacts (voir les théorèmes 1.3.2, 1.3.5 et Ex. 1 du §1.3 de [6]).

Pour $X \in Es_{\mathbb{U}}$, on note $SPr(X)$ la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans $SEns_{\mathbb{U}}$. On munit $SPr(X)$ de la structure de cmf de [14, §5] (voir aussi [2]). Nous mettons en garde le lecteur qu'il ne s'agit pas de la structure définie dans [10], mais de la structure de type $HBKQ$ de [14, §5], où les cofibrations sont engendrées par *les additions libres de cellules*. Cependant les équivalences dans $SPr(X)$ sont aussi les équivalences utilisées dans [10]. Dans notre situtation ce sont donc exactement les morphismes $f : F \longrightarrow G$ tels que pour tout $x \in X$, le morphisme induit sur les fibres $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ soit une équivalence.

Rappelons aussi que la structure de cmf sur $SPr(X)$ est obtenue par localisation de Bousfield à gauche de la structure de cmf pour la topologie grossière sur la catégorie $Ouv(X)$ des ouverts de X en *inversant les hyper-recouvrements*. Une démonstration de ce dernier résultat pourra se trouver dans le travail [3]. Ceci entraine en particulier une jolie charactérisation des objets fibrants. Afin de l'énoncer rappelons la définition d'hyper-recouvrement de [1, 8.4].

Définition 2.1 *Un ($\mathbb{U}$-)hyper-recouvrement U_* d'un ouvert $U \subset X$ est un faisceau simplicial U_* sur l'espace topologique U satisfaisant aux propriétés suivantes.*

1. *Pour tout entier $n \geq 0$, le faisceau U_n est isomorphe à une réunion disjointe d'une famille $\mathbb{U}$-petite de faisceaux représentables par des ouverts de U. On écrira symboliquement*

$$U_n \simeq \coprod_{i \in I_n} U_n^{(i)},$$

   avec $I_n \in \mathbb{U}$ et $U_n^{(i)}$ des ouverts de U.

2. *Le morphisme $U_0 \longrightarrow *$ est un épimorphisme de faisceaux sur U. En d'autres termes la famille $\{U_0^{(i)}\}_{i \in I_0}$ est un recouvrement ouvert de U.*

3. *Pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme*

$$U_{n+1} \longrightarrow (Cosq_n U_*)_{n+1}$$

   est un épimorphisme de faisceaux sur U.

Dans la définition précédente, $(Cosq_n U_*)_{n+1}$ désigne le $(n+1)$-étage du n-ème co-squelette de l'objet simplicial U_*, qui est défini dans [1, §8], et que l'on peut aussi définir comme suit. Comme la catégorie des faisceaux sur U (à valeurs dans $\mathbb{U}$) est compléte et co-complète, on peut munir la catégorie des faisceaux simpliciaux sur U d'une structure de catégorie enrichie sur $SEns_{\mathbb{U}}$. De plus, cette structure enrichie possède des produits externes et des objets exponentiels par des objets de $SEns_{\mathbb{U}}$ (voir par exemple [7, §II.2]). En particulier, pour un faisceau simplicial U_*, le faisceau simplicial $U_*^{\partial \Delta^{n+1}}$ existe. On a alors

$$(Cosq_n U_*)_{n+1} = (U_*^{\partial \Delta^{n+1}})_0.$$

Dans le lemme suivant, on utilisera la notation $F(U_n)$ pour F un préfaisceau simplicial sur X et U_* un hyper-recouvrement d'un ouvert U. Avec les notations de la définition 2.1, on désigne de cette façon

$$F(U_n) := \prod_{i\in I_n} F(U_n^{(i)}).$$

Lemme 2.2 *(Voir [3]) Un objet $F \in SPr(X)$ est fibrant si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites.*

1. *Pour tout ouvert $U \subset X$, $F(U)$ est fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}$.*
2. *Pour tout ouvert $U \subset X$, et tout hyper-recouvrement ouvert U_* de U, le morphisme naturel*

$$F(U) \longrightarrow Holim_{[m]\in\Delta} F(U_m)$$

est une équivalence dans $SEns_{\mathbb{U}}$.

Remarque: Un préfaisceau simplicial qui vérifie la seconde condition est généralement appelé un *champ* (c'est le point de vue utilisé dans [14]). De plus, bien que la théorie ne soit pas encore développée, la théorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux est sensée être équivalente à celle des préfaisceaux en ∞-groupoïdes. Ainsi, comme la 1-catégorie de Segal $LSPr(X)$ est équivalente à la catégorie simpliciale des objets fibrants et cofibrants dans $SPr(X)$, on peut légitimement penser à $LSPr(X)$ comme à un modèle pour la ∞-catégorie des ∞-champs en groupoïdes sur X. Nous appellerons alors *champ* tout objet de $LSPr(X)$.

Définition 2.3 *La 1-catégorie de Segal des champs sur X est $LSPr(X)$.*

Rappelons aussi que $SPr(X)$ est aussi une cmf simpliciale, le produit externe de $F \in SPr(X)$ par $A \in SEns_{\mathbb{U}}$ étant défini par la formule

$$\begin{array}{cccc} A\times F: & Ouv(X)^o & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}} \\ & U & \mapsto & A\times F(U). \end{array}$$

On dispose alors de Hom à valeurs dans $SEns_{\mathbb{U}}$, qui seront notés comme d'habitude $\underline{Hom}$. Par définition, on a $\underline{Hom}(F,G)_m := Hom(\Delta^m \times F, G)$. Enfin, il existe une opération d'exponentiation, qui à $F \in SPr(X)$ et $A \in SEns_{\mathbb{U}}$ associe le préfaisceau simplicial F^A défini par

$$\begin{array}{cccc} F^A: & Ouv(X)^o & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}} \\ & U & \mapsto & F(U)^A. \end{array}$$

Ces constructions satisfont aux relations d'adjonctions usuelles, et de plus aux axiomes de [9, §4.2.18] définissant la structure de cmf simpliciale.

Pour tout morphisme dans $Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, $f : Y \longrightarrow X$, on dispose d'un foncteur d'images directes

$$f_* : SPr(Y) \longrightarrow SPr(X)$$

défini par la formule $f_*(F)(U) = F(f^{-1}(U))$. Ce foncteur possède un adjoint à gauche

$$f^* : SPr(X) \longrightarrow SPr(Y).$$

Comme f^* préserve les équivalences et les cofibrations, f^* est de Quillen à gauche, et donc f_* est de Quillen à droite.

Notons que $X \mapsto SPr(X)$, $f \mapsto f^*$ définit une catégorie cofibrée sur $Es_{\mathbb{U}}$. En appliquant le procédé standard (voir par exemple [11, Thm. 3.4]) de strictification on supposera que ceci définit un vrai foncteur

$$\begin{array}{ccc} Es_{\mathbb{U}} & \longrightarrow & Cat_{\mathbb{V}} \\ X & \mapsto & SPr(X) \\ (f : X \to Y) & \mapsto & (f^* : SPr(Y) \to SPr(X)) \end{array}$$

On se permettra donc de supposer par la suite que pour $f : Y \longrightarrow X$ et $g : Z \longrightarrow Y$ deux morphismes, on a une égalité $g^* f^* = (fg)^*$.

Remarque: Le choix des univers $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ est tel qu'après strictification les catégories $SPr(X)$ appartiennent toujours à $\mathbb{V}$. De plus, comme la notion de structure de cmf est invariante par équivalence de catégories, les catégories $SPr(X)$ sont munies naturellement de structures de cmf. De même, les foncteurs f^* restent de Quillen à gauche.

Définition 2.4 *Soit $X \in Es_{\mathbb{U}}$.*

- *Un objet $F \in SPr(X)$ est h-constant, s'il est isomorphe dans $Ho(SPr(X))$ à un préfaisceau constant.*
- *Un objet $F \in SPr(X)$ est localement h-constant s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, tel que pour tout $i \in I$ la restriction de F à U_i, $F_{|U_i} \in SPr(U_i)$ soit h-constant.*
- *La sous-catégorie pleine de $SPr(X)$ formée des objets localement h-constants sera notée $PrLoc(X)$.*
- *On définit*
$$Loc(X) := LPrLoc(X).$$
Elle sera considérée comme un objet de $1 - PrCat_{\mathbb{V}}$.

La 1-catégorie de Segal $Loc(X)$ est appelée la 1-catégorie de Segal des champs localement constants sur X.

Remarque: Comme la sous-catégorie $PrLoc(X)$ de $SPr(X)$ est stable par équivalences, le foncteur naturel $Loc(X) \longrightarrow LSPr(X)$ est pleinement fidèle. Nous utiliserons en particulier que le foncteur induit $Ho(Loc(X)) \longrightarrow Ho(SPr(X))$ est pleinement fidèle, et que son image essentielle est formée des objets localement h-constants.

Rappelons que pour $X \in Es_{\mathbb{U}}$, $F \in SPr(X)$ et $x \in X$, on définit comme il en est l'usage la fibre en x par

$$F_x := Colim_{x\in U} F(U)$$

où la colimite est prise sur les voisinages de x dans X.

On dispose alors du foncteur fibre en x

$$\omega_x : SPr(X) \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}.$$

Comme c'est un foncteur qui préserve les équivalences il induit un morphisme dans $1 - PrCat_{\mathbb{V}}$

$$L\omega_x : LPrLoc(X) = Loc(X) \longrightarrow LSEns_{\mathbb{U}} = Top.$$

On obtient de cette façon un objet

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x) \in Ho((1-PrCat_{\mathbb{V}})_*).$$

Soit $f : (Y,y) \longrightarrow (X,x)$ un morphisme dans $*/Es_{\mathbb{U}}$. Le foncteur d'image inverse f^* préserve clairement les équivalences ainsi que les objets localement h-constants. Il induit donc un morphisme sur les localisées de Dwyer-Kan

$$Lf^* : LPrLoc(X) = Loc(X) \longrightarrow LPrLoc(Y) = Loc(Y).$$

Ce morphisme étant compatible avec les foncteurs fibres en x et y il induit un morphisme dans $Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}})$

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(Y), Top), L\omega_y) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x).$$

On définit ainsi un foncteur

$$\begin{array}{cccc} (Loc(-), L\omega) : & */Es_{\mathbb{U}}^{cw} & \longrightarrow & Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}}) \\ & (X,x) & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x). \end{array}$$

Il est important de remarquer que nous n'avons défini le foncteur ci-dessus que sur la sous-catégorie de Es formée des CW complexes.

Lemme 2.5 *Soit F un objet dans $PrLoc(X)$, et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme dans $Es_{\mathbb{U}}$. Alors pour tout $y \in Y$ le morphisme induit sur les fibres*

$$f^*(F)_y \longrightarrow F_{f(y)}$$

est un isomorphisme.

Preuve: C'est immédiat par définition. $\Box$

Corollaire 2.6 *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme surjectif dans $Es_{\mathbb{U}}$, et $u : F \longrightarrow G$ un morphisme dans $Ho(SPr(X))$. Alors u est un isomorphisme si et seulement si le morphisme induit*

$$f^*(F) \longrightarrow f^*(G)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SPr(Y))$.

Preuve: En effet, comme f est surjective le lemme 2.5 entraine que pour tout $x \in X$ le morphisme $u_x : F_x \longrightarrow G_x$ est une équivalence. $\Box$

2.2 Champs localement constants et fibrations

Dans ce paragraphe nous allons démontrer un analogue pour les champs localement constants de la correspondance entre faisceaux localement constants et revêtements. Pour cela nous construirons pour tout CW complexe X, une adjonction de Quillen (Se pour *section*, et R pour *réalisation*)

$$Se : SEns/S(X) \longrightarrow SPr(X) \qquad R : SPr(X) \longrightarrow SEns/S(X),$$

et nous montrerons que les morphismes induits sur les localisées de Dwyer-Kan

$$LSe : LSEns/S(X) \longrightarrow LSPr(X) \qquad LR : LSPr(X) \longrightarrow LSEns/S(X),$$

induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre dans $Ho(1-PrCat)$ entre $Loc(X)$ et $LSEns/S(X)$ (voir le théorème 2.13). Remarquons que $LSEns/S(X)$ est naturellement isomorphe dans $Ho(1-PrCat)$ à la catégorie simpliciale des fibrations sur $S(X)$. Le résultat que nous démontrerons peut donc se résumer en affirmant que *les champs localement constants sur X sont classifiés par les fibrations sur $S(X)$*.

Soit $S \in SEns_{\mathbb{U}}$ un ensemble simplicial et $SEns_{\mathbb{U}}/S$ la cmf des ensembles simpliciaux sur S.

Définition 2.7 *Pour tout ensemble simplicial S, nous définissons la 1-catégorie de Segal des fibrations sur S par*

$$Fib(S) := L(SEns_{\mathbb{U}}/S) \in 1 - PrCat_{\mathbb{V}}.$$

Nous noterons aussi

$$Top := Fib(*) \in 1 - PrCat_{\mathbb{V}}.$$

Remarquer que $Fib(S)$ est une 1-catégorie de Segal équivalente à la catégorie simpliciale des fibrations sur S. Ceci justifie le choix de la terminologie. De même Top est équivalente à la catégorie simpliciale des ensemble simpliciaux fibrants. Elle est donc équivalente à la localisée de Dwyer-Kan des espaces topologiques, d'où le choix de la notation Top.

Soit $f : S' \longrightarrow S$ un morphisme dans $SEns_{\mathbb{U}}$. On dispose alors de deux foncteurs adjoints (f^* étant adjoint à droite de $f_!$)

$$\begin{array}{cccc} f^* : & SEns_{\mathbb{U}}/S & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}}/S' \\ & (Y \to S) & \mapsto & (Y \times_S S' \to S'), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f_! : & SEns_{\mathbb{U}}/S' & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}}/S \\ & (Z \to S') & \mapsto & (Z \to S' \to S). \end{array}$$

La correspondance $S \mapsto SEns_{\mathbb{U}}/S$, $f \mapsto f^*$ définit une catégorie cofibrée sur $SEns_{\mathbb{U}}$ à valeurs dans $Cat_{\mathbb{V}}$. Pour être tout à fait rigoureux nous supposerons par la suite que nous l'avons strictifiée et donc que pour deux morphismes $f : S' \longrightarrow S$ et $g : S'' \longrightarrow S'$ on a $g^*f^* = (gf)^*$.

Remarque: Comme dans le paragraphe précédent, les catégories $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$ restent des cmf de $\mathbb{V}$, et les foncteurs f^* restent de Quillen à gauche.

Le foncteur $f^* : SEns_{\mathbb{U}}/S \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}/S'$ possède aussi un adjoint à droite,

$$f_* : SEns_{\mathbb{U}}/S' \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}/S.$$

En effet, f^* commute avec les $\mathbb{U}$-colimites, et $SEns_{\mathbb{U}}/S'$ possède un ensemble d'objets générateurs appartenant à $\mathbb{U}$ (à savoir les morphismes $\Delta^m \to S'$).

Notons enfin que les foncteurs f^* et $f_!$ préservent les structures simpliciales, et donc les isomorphismes d'adjonctions induisent des isomorphismes naturels

$$\underline{Hom}_S(A, f_*B) \simeq \underline{Hom}_{S'}(f^*A, B) \qquad \underline{Hom}_S(f_!A, B) \simeq \underline{Hom}_{S'}(A, f^*B),$$

où $\underline{Hom}_S$ désigne le Hom simplicial de $SEns_{\mathbb{U}}/S$.

Le foncteur $f_!$ est clairement de Quillen à gauche, et donc f^* est de Quillen à droite. Ainsi, on en déduit un morphisme dans $Ho(1-PrCat_{\mathbb{V}})$

$$Lf^* : L(SEns_{\mathbb{U}}/S) = Fib(S) \longrightarrow (LSEns_{\mathbb{U}}/S') = Fib(S').$$

Par exemple, lorsque $S' = \{s\}$ est un point de S on obtient un foncteur fibre

$$L\omega_s : Fib(S) \longrightarrow Fib(*) = Top.$$

Ainsi, si $(S,s) \in */SEns_{\mathbb{U}}$ est un ensemble simplicial pointé on en déduit un objet

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S), Top), L\omega_s) \in Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}})$$

qui dépend fonctoriellement du couple (S,s). Ceci détermine donc un foncteur

$$\begin{array}{rccc} (Fib(-), L\omega) : & */SEns_{\mathbb{U}} & \longrightarrow & Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}}) \\ & (S,s) & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S), Top), L\omega_s) \end{array}$$

Remarquons enfin, que si f est une fibration, alors f^* préserve les équivalences (car la cmf $SEns_{\mathbb{U}}$ est propre) ainsi que les cofibrations et donc est de Quillen à gauche. Ceci implique par adjonction que f_* est alors de Quillen à droite (ceci n'est plus vrai pour f quelconque).

Lemme 2.8 *Soit $f : (S,s) \longrightarrow (S',s')$ une équivalence dans $*/SEns_{\mathbb{U}}$. Alors le morphisme induit*

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S), Top), L\omega_s) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S'), Top), L\omega_{s'})$$

est un isomorphisme dans $Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}})$

Preuve: Il suffit de montrer que $Lf^* : LSEns_{\mathbb{U}}/S \longrightarrow LSEns_{\mathbb{U}}/S'$ est une équivalence de 1-catégories de Segal. Pour cela il suffit de remarquer que l'adjonction $(f_!, f^*)$ est une équivalence de Quillen, ce qui est varie car $SEns$ est une cmf propre à droite (i.e. les changements de bases le long de fibrations préservent les équivalences). $\square$

Le lemme implique en particulier que le foncteur $(Fib(-), L\omega)$ se factorise par la catégorie homotopique,

$$(Fib(-), L\omega) : Ho(*/SEns_{\mathbb{U}}) \longrightarrow Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}}).$$

Proposition 2.9 *Pour tout $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, il existe une adjonction de Quillen*

$$R : SPr(X) \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}/S(X) \qquad Se : SEns_{\mathbb{U}}/S(X) \longrightarrow SPr(X).$$

De plus, pour tout morphisme dans $Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, $f : Y \longrightarrow X$, il existe des isomorphismes, naturels en f

$$f_* Se \simeq Sef_* \qquad Rf^* \simeq f^* R.$$

Preuve: Soit $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$ et définissons l'adjonction de Quillen de la façon suivante. Pour $Y \to S(X)$ un objet de $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$ on définit $Se(Y \to S(X))$ par

$$\begin{array}{ccc} Ouv(X)^o & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}} \\ (U \subset X) & \mapsto & \underline{Hom}_{S(X)}(S(U), Y) \end{array}$$

où $\underline{Hom}_{S(X)}$ est le Hom simplicial de $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$.

Son adjoint à gauche est défini de la façon suivante. Pour $F \in SPr(X)$ on forme le foncteur

$$\begin{array}{ccc} Ouv(X)^o \times Ouv(X) & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}}/S(X) \\ (U,V) & \mapsto & F(U) \times S(V) \end{array}$$

L'objet $R(F)$ est alors le co-end de ce foncteur dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$. Plus précisément, on a

$$R(F) := \left(\coprod_{U \in Ouv(X)} F(U) \times S(U) \right) / \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ identifie $(u^*(x), s) \in F(U) \times S(U)$ avec $(x, u_*(s)) \in F(V) \times S(V)$, pour une inclusion $u : U \subset V$ et $(x,s) \in F(V) \times S(U)$. Il est alors facile de voir que Se est adjoint à droite de R.

Commençons par remarquer que Se est de Quillen à droite lorsque $Ouv(X)$ est muni de la topologie triviale. En d'autres termes il faut montrer que pour toute fibration (resp. fibration triviale) $Y \longrightarrow Y'$ dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$, et tout $U \in Ouv(X)$, le morphisme

$$Se(Y)(U) \longrightarrow Se(Y')(U)$$

est une fibration (resp. une fibration triviale) dans $SEns_{\mathbb{U}}$. Mais ceci se déduit immédiatement du fait que $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$ est une cmf simpliciale et que tous ses objets sont cofibrants.

Ainsi, pour montrer que (R, Se) reste une adjonction de Quillen lorsque l'on effectue la localisation de Bousfield à gauche, il suffit de montrer que Se préserve les objets fibrants. Or, d'après le lemme 2.2 les objets fibrants dans $SPr(X)$ sont les préfaisceaux F fibrants pour la topologie triviale et qui satisfont de plus à la propriété de descente pour les hyper-recouvrements. Il nous faut donc montrer que pour toute fibration $Y \to S(X)$, tout ouvert $U \subset X$, et tout hyper-recouvrement ouvert U_* de U, le morphisme naturel

$$\underline{Hom}_{S(X)}(S(U), Y) \longrightarrow Holim_{[m]\in\Delta} \underline{Hom}_{S(X)}(S(U_m), Y)$$

$$\simeq \underline{Hom}_{S(X)}(Hocolim_{[m]\in\Delta^o} S(U_m), Y)$$

est une équivalence. Or, ce morphisme est induit par le morphisme naturel

$$u : Hocolim_{[m]\in\Delta^o} S(U_m) \longrightarrow S(Hocolim_{[m]\in\Delta^o} U_m) \longrightarrow S(U).$$

Rappelons alors le lemme suivant.

Lemme 2.10 *Le morphisme naturel*

$$Hocolim_{[m]\in\Delta^o} U_m \to U$$

est une équivalence dans $Es_{\mathbb{U}}$.

Preuve: D'aprés les théorèmes 1.3.2 et 1.3.5 de [6] (voir aussi l'exercice 1 du §1.3), tout ouvert d'un CW complexe est paracompact et localement contractile. Le lemme est alors démontré au cours de la preuve de [1, Thm. 2.1]. $\square$

En utilisant le lemme précédent et le fait que le foncteur S présèrve les colimites homotopiques, on voit que le morphisme u est une équivalence d'ensembles simpliciaux. Ainsi, comme $Y \to S(X)$ est fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$, le morphisme en question

$$\underline{Hom}_{S(X)}(S(U), Y) \longrightarrow Holim_{[m]\in\Delta}\underline{Hom}_{S(X)}(S(U_m), Y)$$

est une équivalence. Ceci montre que Se préserve les objets fibrants, et donc que les foncteurs R et Se forment une adjonction de Quillen.

Soit $f : Y \longrightarrow X$, et $Z \to S(Y)$ dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(Y)$. Alors par définition on a pour tout ouvert $U \subset X$

$$\begin{aligned} f_*Se(Z)(U) &\simeq \underline{Hom}_{S(Y)}(S(U) \times_{S(X)} S(Y), Z) \simeq \underline{Hom}_{S(Y)}(f^*S(U), Z) \\ &\simeq \underline{Hom}_{S(X)}(S(U), f_*(Z)) = Sef_*(Z). \end{aligned}$$

Ces isomorphismes étant fonctoriels en U et Z, ils déterminent un isomorphisme $f_*Se \simeq Sef_*$. Le lecteur vérifiera sans peine que cet isomorphisme est naturel en f. L'isomorphisme $Rf^* \simeq f^*R$ se déduit alors du précédent par adjonction. $\square$

Lemme 2.11 *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme dans $Es^{cw}_{\mathbb{U}}$. Alors, pour tout $Z \in Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$ il existe un isomorphisme dans $Ho(SPr(Y))$, naturel en Z*

$$\mathbb{R}Se\mathbb{R}f^*(Z) \simeq f^*\mathbb{R}Se(Z).$$

Preuve: Par adjonction entre f^* et f_*, l'isomorphisme $f_*Se \simeq Sef_*$ induit un morphisme naturel en f, $u : Sef^* \longrightarrow f^*Se$.

Soit $Z \in Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$. Alors $\mathbb{R}Se\mathbb{R}f^*(Z) \simeq Sef^*(Z')$, où $Z \longrightarrow Z'$ est un modèle fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$. En composant avec u, on trouve donc un morphisme naturel en Z

$$u_Z : \mathbb{R}Se\mathbb{R}f^*(Z) \longrightarrow f^*Se(Z') \simeq f^*\mathbb{R}Se(Z).$$

Soit $y \in Y$. La fibre en y du morphisme ci-dessus est isomorphe dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}})$ à

$$Se(f^*(Z'))_y \longrightarrow (f^*Se(Z'))_y \simeq Se(Z')_{f(y)}.$$

Ainsi, pour montrer que u_Z est un isomorphisme, il suffit de montrer que pour tout $p : S \to S(Y)$ fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(Y)$, le morphisme naturel $Se(S)_y \longrightarrow p^{-1}(y)$ est une équivalence. Par définition, on a

$$Se(S)_y = Colim_{y\in V}\underline{Hom}_{S(Y)}(S(V), S) \longrightarrow \underline{Hom}_{S(Y)}(S(y), S) \simeq p^{-1}(y),$$

où la colimite est prise sur les voisinages V de y dans Y. Or, comme Y est localement contractile et p une fibration, le morphisme ci-dessus est une colimite filtrante d'équivalences dans $SEns_{\mathbb{U}}$, et est donc une équivalence. $\square$

Lemme 2.12 *Soit $f : Y \longrightarrow X$ une fibration dans $Es^{cw}_{\mathbb{U}}$. Alors, pour tout $F \in Ho(SPr(X))$ il existe un isomorphisme dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(Y))$, naturel en F*

$$\mathbb{L}Rf^*(F) \simeq \mathbb{R}f^*\mathbb{L}R(F).$$

Preuve: Considérons l'adjoint à droite de f^*, $f_* : SEns_{\mathbb{U}}/S(Y) \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$. Comme f est une fibration, le foncteur f_* de Quillen à droite, et donc f^* est de Quillen à gauche. En particulier, comme f^* préserve les équivalences, on a $\mathbb{R}f^* \simeq \mathbb{L}f^*$. Le lemme se déduit alors de la dernière assertion de la proposition 2.9. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le premier théorème de classification.

Théorème 2.13 *Pour tout $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, le morphisme*

$$LSe : Fib(S(X)) \longrightarrow LSPr(X)$$

se factorise par la sous-1-catégorie de Segal pleine de $LSPr(X)$ formée des objets localement h-constants. De plus, le morphisme induit

$$LSe : Fib(S(X)) \longrightarrow Loc(X)$$

est un un isomorphisme dans $Ho(1 - PrCat_{\mathbb{V}})$, et son inverse est LR.

Preuve: Nous allons procéder en plusieurs étapes.

Lemme 2.14 *Pour tout $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, et tout $Y \in SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$, l'objet $\mathbb{R}Se(Y) \in Ho(SPr(X))$ est localement h-constant.*

Preuve: Comme l'assertion est locale sur X, on peut grâce au lemme 2.11 supposer que X est contractile. L'ensemble simplicial $S(X)$ se rétracte alors par déformation sur un des ses points $s \in S(X)$. Soit $Y \longrightarrow S(X)$ fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$. Comme $Y \longrightarrow S(X)$ est une fibration, $Y \to S(X)$ est isomorphe dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$ à $Y_s \times S(X) \longrightarrow S(X)$, où Y_s est la fibre de Y en s. Ainsi, $\mathbb{R}Se(Y)$ est isomorphe à $\mathbb{R}Se(Y_s \times S(X)) \simeq Se(Y_s \times S(X))$. Mais $Se(Y_s \times S(X))$ est le préfaisceau défini par

$$\begin{array}{rccc} Se(Y_s \times S(X)) : & Ouv(X)^o & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}} \\ & (U \subset X) & \mapsto & \underline{Hom}(S(U), Y_s) \end{array}$$

Soit $\underline{Y_s}$ le préfaisceau constant de fibre Y_s. On définit un morphisme dans $SPr(X)$, $u : \underline{Y_s} \longrightarrow Se(Y_s \times S(X))$, qui au-dessus de $U \subset X$ est le morphisme $Y_s \longrightarrow \underline{Hom}(S(U), Y_s)$ correspondant par adjonction à la projection $Y_s \times S(U) \longrightarrow Y_s$. Par le même argument que celui utilisé dans la preuve du lemme 2.11, on montre que les fibres de u sont des colimites filtrantes d'équivalences, et donc des équivalences. Ceci implique donc que $Se(Y_s \times S(X))$ est h-constant et donc localement h-constant. $\square$

Remarque: Lors de la preuve du lemme ci-dessus on a aussi montré que pour tout $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, et tout $Y \in SEns_{\mathbb{U}}$, le morphisme naturel $\underline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}Se(Y \times S(X))$ était un isomorphisme dans $Ho(SPr(X))$ (où $\underline{Y}$ est le préfaisceau constant de fibre Y).

Lemme 2.15 *Pour tout $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$ et tout $Y \in Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$, le morphisme d'adjonction*

$$\mathbb{L}R\mathbb{R}Se(Y) \longrightarrow Y$$

est un isomorphisme.

Preuve: Soit $x \in X$ un point de X, et $f : (P,p) \longrightarrow (X,x)$ une fibration, avec P contractile. En appliquant $\mathbb{R}f^*$ au morphisme en question et un utilisant le lemme 2.12 on obtient un morphisme dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(P))$

$$\mathbb{R}f^*\mathbb{L}R\mathbb{R}Se(Y) \simeq \mathbb{L}R\mathbb{R}Sef^*(Y) \longrightarrow \mathbb{R}f^*(Y).$$

Comme $S(P)$ est contractile, $\mathbb{R}f^*(Y) \simeq Z \times S(P)$. On a alors déjà vu lors de la preuve du lemme 2.14 que $\mathbb{R}Se\mathbb{R}f^*(Y)$ est naturellement isomorphe au préfaisceau constant de fibre Z. Notons $\underline{Z}$ ce préfaisceau. Or, comme $\underline{Z}$ est un objet cofibrant, $\mathbb{L}R\mathbb{R}Se\mathbb{R}f^*(Y)$ est isomorphe à $R(\underline{Z}) \simeq Z \times S(P)$. A travers ces identifications, le morphisme

$$\mathbb{R}f^*\mathbb{L}R\mathbb{R}Se(Y) \longrightarrow \mathbb{R}f^*(Y)$$

est isomorphe à l'identité. C'est donc un isomorphisme.

On vient donc de montrer que pour tout $x \in X$, le morphisme induit par la fibration $f : (P,p) \longrightarrow (X,x)$

$$u : \mathbb{R}f^*\mathbb{L}R\mathbb{R}Se(Y) \longrightarrow \mathbb{R}f^*(Y)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(P))$. Or, pour $Y \in Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$, $\mathbb{R}f^*(Y)$ est isomorphe à la fibre homotopique de Y en $x \in S(X)$. Ceci signifie que le morphisme d'adjonction

$$\mathbb{L}R\mathbb{R}Se(Y) \longrightarrow Y$$

est un morphisme induisant une équivalence sur toutes les fibres homotopiques. C'est donc une équivalence dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$. $\square$

Remarquons dès à présent que les lemmes 2.14 et 2.15 impliquent que $\mathbb{R}Se : Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X)) \longrightarrow Ho(Loc(X))$ est pleinement fidèle. Il en est donc de même du foncteur $\mathbb{R}Se : Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X)) \longrightarrow Ho(SPr(X))$. De plus, le foncteur Se étant compatible avec l'exponentiation (i.e. il existe des isomorphismes naturels $Se(Y^A) \simeq Se(Y)^A$, pour tout $Y \in SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$ et $A \in SEns_{\mathbb{U}}$), on en déduit que les morphismes naturels dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}})$

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{S(X)}(Y,Z) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_X(\mathbb{R}Se(Y), \mathbb{R}Se(Z)),$$

sont des isomorphismes dans $Ho(SPr(X))$, et ce pour tout $Y,Z \in Ho(SEns_{\mathbb{U}}/S(X))$. Cette dernière remarque nous sera utile pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.16 *Pour tout $X \in Es_{\mathbb{U}}^{cw}$ et tout objet $F \in Ho(Loc(X))$ le morphisme d'adjonction $F \longrightarrow \mathbb{R}Se\mathbb{L}RF$ est un isomorphisme.*

Preuve: Choisissons une fibration surjective $f : P \longrightarrow X$, avec P contractile. Le corollaire 2.6 et les lemmes 2.11 et 2.12 montrent que l'on peut alors supposer que $X = P$. On supposera donc que X est contractile.

Commençons par montrer que tout $F \in PrLoc(X)$ est alors h-constant. Nous pouvons sans perte de généralité supposer que F est fibrant. En choisissant une rétraction de X sur l'un de ses points on vérifie qu'il suffit de montrer que pour tout $F \in PrLoc(X \times I)$, le morphisme d'adjonction

$$\mathbb{L}p^*\mathbb{R}p_*(F) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme, ou $p : X \times I \longrightarrow X$ est la première projection, et $I = [0, 1]$ est l'intervalle standard. Il est alors facile de voir qu'il est équivalent de montrer pour tout F fibrant dans $PrLoc(I)$, F est h-constant, et que et le morphisme fibre en $0 \in I$, $F(I) \longrightarrow F_0$, est une équivalence dans $SEns_{\mathbb{U}}$.

Soit t la borne supérieure des $x \in I$ tel que la restriction de F à $[0, x[$ soit h-constant. Supposons que $t < 1$ et soit $x > 0$ tel que la restriction de F à $]t - x, t + x[$ soit h-constant. Notons alors Z_0 et Z_1 deux ensembles simpliciaux fibrants dans $SEns_{\mathbb{U}}$, et $u_0 : \underline{Z_0} \simeq F_{|[0,t[}$, $u_1 : \underline{Z_1} \simeq F_{|]t-x,t+x[}$ des isomorphismes dans la catégorie homotopique (où $\underline{Z}$ est le préfaisceau constant de fibre Z). Remarquons que les objets $\underline{Z_0}$ et $\underline{Z_1}$ sont cofibrants. Comme F est fibrant, ses restrictions aussi, et on peut ainsi représenter les morphismes précédents par des morphismes de préfaisceaux simpliciaux

$$u_0 : \underline{Z_0} \longrightarrow F_{|[0,t[}, \qquad u_1 : \underline{Z_1} \longrightarrow F_{|]t-x,t+x[}.$$

De plus, l'isomorphisme $\beta := u_1^{-1} u_0 : \underline{Z_0} \longrightarrow \underline{Z_1}$, est un isomorphisme entre $\mathbb{R}Se(Z_0 \times S(]t-x, t[))$ et $\mathbb{R}Se(Z_1 \times S(]t - x, t[))$. Or, d'après le lemme 2.15 le foncteur $\mathbb{R}Se$ est pleinement fidèle. Ainsi, comme les objets $Z_0 \times S(]t-x, t[)$ et $Z_1 \times S(]t-x, t[)$ sont cofibrants et fibrants dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(]t-x, t[)$, on peut trouver un diagramme commutatif à homotopie près dans $SPr(]t - x, t[)$

$$\begin{tikzcd} \underline{Z_0} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "u_0"'] & & \underline{Z_1} \arrow[dl, "u_1"] \\ & F_{|]t-x,t[}. & \end{tikzcd}$$

De plus, quitte à bouger u_0 dans sa classe d'homotopie on peut supposer que ce diagramme est strictement commutatif. On définit alors

$$u : \underline{Z_0} \longrightarrow F_{|[0,t+x[}$$

comme étant u_0 sur $[0, t[$ et $u_1\beta$ sur $]t - x, t + x[$. Comme u_0 et u_1 sont des équivalences u est une équivalence dans $SPr([0, t+x[)$. Ceci contredit $t < 1$, et donc $t = 1$. L'objet $F \in SPr(I)$ est donc h-constant.

On peut alors écrire $F \simeq \mathbb{R}Se(Z \times S(I))$, où $Z \in SEns_{\mathbb{U}}$. Or, comme on sait que $\mathbb{R}Se$ est pleinement fidèle, le morphisme fibre en 0, $F(I) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(*, F) \longrightarrow F_0$ est isomorphe dans $Ho(SEns_{\mathbb{U}})$ au morphisme

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{S(I)}(S(I), Z \times S(I)) \longrightarrow Z \times \{0\},$$

qui à $f : S(I) \longrightarrow Z \times S(I)$ associe $f(0)$. Mais ce dernier morphisme est clairement un isomorphisme. Ceci termine donc la preuve que tout $F \in SPr(X)$ est h-constant.

Revenons donc au cas où X est contractile, et $F \in PrLoc(X)$. Comme on sait que F est h-constant on peut supposer que F est constant de fibre $Z \in SEns_{\mathbb{U}}$, que l'on supposera fibrant. Dans ce cas, F est cofibrant et $\mathbb{R}L(F) \simeq R(F) \simeq Z \times S(X)$. De plus, comme Z est fibrant, $Z \times S(X)$ est fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$. Ainsi, $\mathbb{R}Se(F) \simeq \underline{Z}$, et le morphisme $\mathbb{L}R\mathbb{R}Se(F) \longrightarrow F$ est isomorphe au morphisme naturel

$$R(\underline{Z}) = R(Z \times *) \longrightarrow Z \times R(*) \simeq Z \times S(X),$$

qui est un isomorphisme. $\square$

Soit $C = PrLoc(X)^{cf}$ la sous-catégorie pleine de $SPr(X)$ formée des objets fibrants, cofibrants et localement h-constants. De même, soit $D = (SEns_{\mathbb{U}}/S(X))^{cf}$ la sous-catégorie pleine de $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$ formée des objets fibrants et cofibrants. Nous noterons $Q \to Id$ (resp. $Id \to P$) les foncteurs de remplacement cofibrants (resp. remplacement fibrants) dans $SPr(X)$ ou $SEns_{\mathbb{U}}/S(X)$ (voir [9, §1.1]). On définit deux foncteurs R' et Se' par

$$R' := P \circ R : C \longrightarrow D \qquad Se' := Q \circ Se : D \longrightarrow C.$$

On dispose alors de diagrammes de foncteurs

$$R'Se' = PRQSe \xrightarrow{a} P \xleftarrow{b} Id$$

$$Se'R' = QSePR \xleftarrow{c} Q \xrightarrow{d} Id\ .$$

De plus, les transformations naturelles b et d sont des équivalences objet par objet. De même, les lemmes 2.15 et 2.16 impliquent que a et c sont des équivalences objets par objets. Ceci implique que les morphismes $LR' : LC \longrightarrow LD$ et $LSe' : LD \longrightarrow LC$ sont inverses l'un de l'autre dans $Ho(1 - PrCat_{\mathbb{V}})$, et achève donc la preuve du théorème 2.13. $\square$

Corollaire 2.17 *Pour tout $(X, x) \in */Es^{cw}_{\mathbb{U}}$ il existe un isomorphisme dans $Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}})$, fonctoriel en (X, x)*

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S(X)), Top), L\omega_x).$$

Preuve: Soit $p : (P, y) \longrightarrow (X, x)$ une fibration dans $Es^{cw}_{\mathbb{U}}$, avec P contractile. Par la proposition 2.9 il existe un carré de catégories

$$\begin{tikzcd} PrLoc(X)^c \arrow[r, "R"] \arrow[d, "p^*"'] & SEns_{\mathbb{U}}/S(X) \arrow[d, "p^*"] \\ PrLoc(P)^c \arrow[r, "R"'] & SEns_{\mathbb{U}}/S(P) \end{tikzcd}$$

et un isomorphisme naturel de foncteurs $h : p^*R \simeq Rp^*$. On représente cet isomorphisme par un diagramme commutatif de catégories

$$\begin{tikzcd} PrLoc(X)^c \arrow[r, "R"] \arrow[d, "i_0"'] & SEns_{\mathbb{U}}/S(X) \arrow[d, "p^*"] \\ PrLoc(X)^c \times \overline{I} \arrow[r, "h"] & SEns_{\mathbb{U}}/S(P) \\ PrLoc(X)^c \arrow[r, "p^*"'] \arrow[u, "i_1"] & PrLoc(P)^c, \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

où $\overline{I}$ est la catégorie possédant deux objets 0 et 1 et un unique isomorphisme entre les deux. En appliquant la localisation de Dwyer-Kan on obtient un diagramme commutatif dans $1-PrCat_{\mathbb{V}}$

$$\begin{tikzcd}
LPrLoc(X)^c \arrow[r, "LR"] \arrow[d, "Li_0"'] & Fib(S(X)) \arrow[d, "Lp^*"] \\
L(PrLoc(X)^c \times \overline{I}) \arrow[r, "Lh"] & Fib(S(P)) \\
LPrLoc(X)^c \arrow[r, "Lp^*"'] \arrow[u, "Li_1"] & LPrLoc(P)^c. \arrow[u, "LR"']
\end{tikzcd}$$

Par le théorème 2.13 les morphismes LR sont des équivalences. De plus, comme i_0 et i_1 sont des équivalences de catégories, Li_0 et Li_1 sont aussi des équivalences. Ainsi, ce diagramme fournit un isomorphisme bien défini dans $Ho(1-PrCat)$

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LPrLoc(X)^c, LPrLoc(P)^c), Lp^*)) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S(X)), Fib(S(P))), Lp^*)).$$

De plus, une application du lemme 2.8, de la proposition 2.9 et du théorème 2.13 implique qu'il existe des isomorphismes naturels

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(LPrLoc(X)^c, LPrLoc(P)^c), Lp^*)) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x)$$

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S(X)), Fib(S(P))), Lp^*)) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S(X)), Top), L\omega_x)$$

On obtient ainsi l'isomorphisme cherché. En utilisant que l'isomorphisme h est naturel en f, Le lecteur vérifiera que cet isomorphisme est fonctoriel en $(X,x) \in */Es_{\mathbb{U}}^{cw}$. □

Remarquons enfin que le corollaire 2.17 et le lemme 2.8 impliquent que le foncteur $(X,x) \mapsto (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x)$ induit un foncteur sur la catégorie homotopique

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/Es_{\mathbb{U}}^{cw}) & \longrightarrow & Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}}) \\ (X,x) & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x). \end{array}$$

De plus, comme tout espace est (faiblement) équivalent à un CW-complexe, le foncteur naturel $Ho(*/Es_{\mathbb{U}}^{cw}) \longrightarrow Ho(*/Es_{\mathbb{U}})$ est une équivalence de catégories. Ainsi, le foncteur précédent induit un foncteur bien défini à isomorphisme unique près

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/Es_{\mathbb{U}}) & \longrightarrow & Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}}) \\ (X,x) & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x). \end{array}$$

Notons que ceci est un abus de notations car l'image de $(X,x) \in Ho(*/Es_{\mathbb{U}})$ est réellement définie comme étant $(\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X'), Top), L\omega_{x'})$, où (X',x') est un CW complexe pointé (faiblement) équivalent à (X,x).

2.3 Fibrations et représentations des groupes simpliciaux

Dans ce paragraphe nous allons démontrer un analogue pour le cas des fibrations de la correspondance entre revêtements sur X et $\pi_1(X,x)$-ensembles. Une remarque clé est que tout ensemble simplicial S connexe est équivalent au classifiant d'un groupe simplicial G. Ainsi, d'après la propriété d'invariance de la 1-catégorie de Segal des fibrations sur S (voir le lemme 2.8), on supposera que $S = d(G)$ est un tel classifiant. On définira alors une équivalence de Quillen entre $SEns/S$ et la catégorie des G-ensembles simpliciaux de façon assez évidente. Ceci montrera que *les fibrations sur $d(G)$ sont classifiés par les représentations de G.*

Soit $G \in SGp_{\mathbb{U}}$ un groupe simplicial et $G - SEns_{\mathbb{U}}$ la catégorie des G-ensembles simpliciaux de $\mathbb{U}$ (i.e. des ensembles simpliciaux de $\mathbb{U}$ munis d'une action de G). On dispose d'une paire de foncteurs adjoints

$$F : SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow G - SEns_{\mathbb{U}} \qquad \omega_G : G - SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}$$

où ω_G est le foncteur d'oubli de la structure de G-modules. Le foncteur F (F pour *free*) associe à tout $T \in SEns_{\mathbb{U}}$ le G-module libre engendré par T, défini par $L(T) := T \times G$, où G opère trivialement sur le facteur de gauche et par translations (à gauche) sur celui de droite. Pour plus de simplicité nous noterons encore par T l'ensemble simplicial $\omega_G(T)$, sous-jacent à un objet $T \in SEns_{\mathbb{U}}$.

Il existe une structure de cmf sur $G - SEns_{\mathbb{U}}$ où les fibrations (resp. les équivalences) sont les morphismes $f : T \longrightarrow T'$ tels que le morphisme induit sur les ensembles simpliciaux sous-jacents soit une fibration (resp. une équivalence). On peut aussi définir une structure de catégorie enrichie sur $SEns_{\mathbb{U}}$ qui est fait une catégorie de modèles simpliciale (voir [7, §V.2.3]).

Pour fixer les notations, rappelons que le produit externe de $T \in G - SEns_{\mathbb{U}}$ par un ensemble simplicial $S \in SEns_{\mathbb{U}}$ est simplement défini par $S \otimes T := S \times T$, où G opère trivialement sur le premier facteur. Le Hom simplicial entre deux G-ensembles simpliciaux T et T' sera noté $\underline{Hom}_G(T, T')$ et satisfait à la formule d'adjonction usuelle

$$Hom(S \otimes T, T') \simeq Hom(S, \underline{Hom}_G(T, T')).$$

Corollaire 2.18 *Le foncteur $\omega_G : G - SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}$ est de Quillen à droite. Le foncteur $F : SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow G - SEns_{\mathbb{U}}$ est de Quillen à gauche.*

Preuve: C'est clair. □

Corollaire 2.19 *Le foncteur*

$$F : SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow G - SEns_{\mathbb{U}}$$

est de Quillen à gauche, préserve la structure simpliciale et les objets fibrants.

Preuve: En effet, l'ensemble simplicial sous-jacent à G, est fibrant ([7, §I.3.4]). Ainsi, si $S \in SEns_{\mathbb{U}}$ est fibrant $\omega_G F(S) = S \times G$ est fibrant dans $SEns_{\mathbb{U}}$. Par définition ceci implique que $F(S)$ est fibrant dans $G - SEns_{\mathbb{U}}$. Il est clair que F préserve les produits externes par des ensembles simpliciaux. □

Définition 2.20 *Soit $G \in SGp_{\mathbb{U}}$. La 1-catégorie de Segal des représentations de G, $G - Top$, est définie par*

$$G - Top := L(G - SEns_{\mathbb{U}}) \in 1 - PrCat_{\mathbb{V}}.$$

Le foncteur ω_G préserve les équivalences et définit donc un morphisme dans $1-PrCat_{\mathbb{V}}$

$$L\omega_G : G-Top \longrightarrow Top.$$

Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme dans $SGp_{\mathbb{U}}$. On en déduit un foncteur

$$f^* : H-SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow G-SEns_{\mathbb{U}}$$

obtenu en composant les actions par f. Ce foncteur préserve évidemment les équivalences, et de plus commute avec les foncteurs d'oublis. On dispose donc d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H-SEns_{\mathbb{U}} \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\omega_H"'] & & G-SEns_{\mathbb{U}} \arrow[dl, "\omega_G"] \\ & SEns_{\mathbb{U}} & \end{tikzcd}$$

On y applique alors la localisation de Dwyer-Kan pour obtenir un morphisme dans $Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}})$

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(G-Top,Top),L\omega_G) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(H-Top,Top),L\omega_H).$$

Ceci défini donc un foncteur

$$\begin{array}{ccc} SGp_{\mathbb{U}} & \longrightarrow & Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}}) \\ G & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(G-Top,Top),L\omega_G) \end{array}$$

Lemme 2.21 *Soit $f : G \longrightarrow H$ une équivalence dans $SGp_{\mathbb{U}}$. Alors le morphisme induit dans $Ho(*/1-PrCat_{\mathbb{V}})$*

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(G-Top,Top),L\omega_G) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(H-Top,Top),L\omega_H)$$

est un isomorphisme.

Preuve: Il suffit de montrer que le foncteur $f^* : H-SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow G-SEns_{\mathbb{U}}$ est une équivalence de Quillen. Pour cela remarquons tout d'abord qu'il possède un adjoint à gauche

$$\begin{array}{cccc} f_! : & G-SEns_{\mathbb{U}} & \longrightarrow & H-SEns_{\mathbb{U}} \\ & T & \mapsto & (T\times H)/G \end{array}$$

où G opère diagonalement sur $T\times H$, et H opère sur $(T\times H)/G$ en opérant à droite sur le second facteur. Comme le foncteur f^* est clairement de Quillen à droite, $f_!$ est de Quillen à gauche.

Remarquons aussi que le foncteur $\mathbb{R}f^* : Ho(H-SEns_{\mathbb{U}}) \longrightarrow Ho(G-SEns_{\mathbb{U}})$ est conservatif. Ainsi, il nous suffit de montrer que le morphisme d'adjonction $T \longrightarrow \mathbb{R}f^*\mathbb{L}f_!(T)$ est un isomorphisme pour tout $T\in Ho(G-SEns_{\mathbb{U}})$. Mais ce morphisme est isomorphe au morphisme naturel

$$(T'\times G)/G \longrightarrow (T'\times H)/G,$$

où T' est un modèle cofibrant pour T. Or, une application de [7, §V.2.10] montre que $T'\times G$ et $T'\times H$ sont cofibrants dans $G-SEns_{\mathbb{U}}$. Ainsi, comme le foncteur $X\mapsto X/G$ est de Quillen à gauche, et que le morphisme $T'\times G \longrightarrow T'\times H$ est une équivalence par hypothèse, on en déduit que $(T'\times G)/G \longrightarrow (T'\times H)/G$ est une équivalence d'ensembles simpliciaux. □

Le lemme précédent permet de définir un foncteur sur les catégories homotopiques

$$\begin{array}{ccc} H(SGp_{\mathbb{U}}) & \longrightarrow & Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}}) \\ G & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(G - Top, Top), L\omega_G) \end{array}$$

Rappelons que pour $G \in SGp_{\mathbb{U}}$ on dispose de sa diagonale $d(G)$, qui est l'ensemble simplicial définit par $d(G)([m]) := G([m])^m$. De plus, comme $d(G)([0]) = *$, cet ensemble simplicial est réduit et donc naturellement pointé. Ceci définit donc un foncteur $d : Ho(SGp_{\mathbb{U}}) \longrightarrow Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})$. En le composant avec le foncteur $(S, s) \mapsto (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S), Top), L\omega_s)$ défini dans le paragraphe précédent on en déduit

$$\begin{array}{ccc} Ho(SGp_{\mathbb{U}}) & \longrightarrow & Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}}) \\ G & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Top), L\omega_*), \end{array}$$

oú $* \in d(G)$ désigne le point de base naturel de la diagonale $d(G)$.

Le second théorème de classification est le suivant.

Théorème 2.22 *Pour tout $G \in SGp_{\mathbb{U}}$ il existe un isomorphisme dans $Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}})$*

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Top), L\omega_*) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(G - Top, Top), L\omega_G),$$

qui est fonctoriel en $G \in Ho(SGp_{\mathbb{U}})$.

Preuve: Nous allons définir l'isomorphisme en question, et nous laisserons le soin au lecteur de vérifier que la construction est fonctorielle en G.

Rappelons que pour $G \in SGp_{\mathbb{U}}$ nous avons noté EG la diagonale de l'ensemble bi-simplicial défini par

$$\begin{array}{cccc} EG : & \Delta^o & \longrightarrow & SEns_{\mathbb{U}} \\ & [m] & \mapsto & G^{m+1} \end{array}$$

et où les faces et dégénérescences sont données par les projections et les diagonales. Comme le morphisme $G \to *$ possède une section, EG est un ensemble simplicial contractile. De plus, il est naturellement muni d'une action de G à gauche, et le quotient EG/G est naturellement isomorphe à $d(G)$. On dispose donc d'un morphisme naturel dans $SEns_{\mathbb{U}}$

$$f_G : EG \longrightarrow d(G),$$

qui d'après [7, §V.2.7] est une fibration surjective.

Notons $e \in EG$ le point correspondant à l'identité dans le groupe $EG([0]) = G([0])$. L'image de e est évidemment le point de base $* \in d(G)$. On dispose donc d'un diagramme commutatif de foncteurs de Quillen à droite,

$$\begin{tikzcd} SEns_{\mathbb{U}}/d(G) \arrow[rr, "f_G^*"] \arrow[dr, "\omega_\bullet"'] & & SEns_{\mathbb{U}}/EG \arrow[dl, "\omega_e"] \\ & SEns_{\mathbb{U}} & \end{tikzcd}$$

En passant aux localisées de Dwyer-Kan on en déduit un morphisme dans $Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}})$,

$$L\omega_e : (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Fib(EG)), Lf_G^*) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Top), L\omega_*).$$

Or, d'après le lemme 2.8 le morphisme $L\omega_e : Fib(EG) \longrightarrow Top$ est un isomorphisme dans $Ho(1-PrCat)$. Ceci implique que $L\omega_e$ induit en réalité un isomorphisme

$$L\omega_e : (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Fib(EG)), Lf_G^*) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Top), L\omega_*).$$

Il nous suffit donc de montrer que le membre de gauche est isomorphe à $(\mathbb{R}\underline{Hom}(G-Top, Top), L\omega_G)$.

Soit $G \in SGp_{\mathbb{U}}$ et définissons une adjonction de Quillen (M pour *monodromie*, et D pour *descente*)

$$D : G - SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}/d(G) \qquad M : SEns_{\mathbb{U}}/d(G) \longrightarrow G - SEns_{\mathbb{U}}.$$

Pour $Y \to d(G)$ un objet de $SEns_{\mathbb{U}}/d(G)$ on pose

$$M(Y) := \underline{Hom}_{d(G)}(EG, Y),$$

où G opère sur $M(Y)$ en opérant sur EG. Son adjoint à gauche est défini par

$$D(T) := T \times_G EG = (T \times EG)/G,$$

pour tout $T \in G - SEns_{\mathbb{U}}$, et pour l'action diagonale sur $T \times EG$. D'après les propriétés des Hom simpliciaux de $SEns_{\mathbb{U}}/d(G)$, il est immédiat que M est de Quillen à droite, et donc que D est de Quillen à gauche.

Lemme 2.23 *Les foncteurs M et D définissent une équivalence de Quillen.*

Preuve: Soit $Y \in SEns_{\mathbb{U}}/d(G)$ un objet fibrant. Alors, l'ensemble simplicial sous-jacent à $M(Y)$ est $\underline{Hom}_{d(G)}(EG, Y)$. Mais comme EG est contractile, le morphisme naturel

$$\underline{Hom}_{d(G)}(EG, Y) \longrightarrow \underline{Hom}_{d(G)}(e, Y) = Y_e,$$

où Y_e est la fibre de $Y \to d(G)$ au point $*$, est une équivalence. Comme $d(G)$ est connexe ceci implique que le foncteur $\mathbb{R}M : Ho(SEns_{\mathbb{U}}/d(G)) \longrightarrow Ho(G - SEns_{\mathbb{U}})$ est conservatif. Il nous suffit donc de montrer que pour tout $T \in G - SEns_{\mathbb{U}}$ cofibrant le morphisme d'adjonction

$$T \longrightarrow \mathbb{R}M\mathbb{L}D(T)$$

est un isomorphisme dans $Ho(G - SEns_{\mathbb{U}})$. Mais par définition de M et D ce morphisme est isomorphe à

$$T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_{d(G)}(EG, T \times_G EG) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}_{EG}(EG, (T \times_G EG) \times_{d(G)} EG).$$

Or, $(T \times_G EG) \times_{d(G)} EG$ est naturellement isomorphe à $T \times EG$, et donc le morphisme précédent se réduit au morphisme naturel

$$T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_{EG}(EG, T \times EG) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(EG, T),$$

qui est clairement un isomorphisme car EG est contractile. $\square$

Considérons le diagramme suivant de cmf

$$\begin{tikzcd}
G - SEns_{\mathbb{U}} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\omega_G"'] & SEns_{\mathbb{U}}/d(G) \arrow[d, "f_G^*"] \\
SEns_{\mathbb{U}} \arrow[r, "- \times EG"'] & SEns_{\mathbb{U}}/EG
\end{tikzcd}$$

où $f_G : EG \longrightarrow d(G)$ est la projection naturelle. Comme ce diagramme commute à isomorphisme naturel près, et que les morphismes LD et $L(- \times EG)$ sont des équivalences, le même argument que dans la preuve du corollaire 2.17 implique qu'il existe un isomorphisme fonctoriel en G

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(G - Top, Top), L\omega_G) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Fib(EG)), Lf_G^*).$$

Enfin, nous avons déjà vu que le membre de droite est naturellement isomorphe à $(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G)), Top), L\omega_*)$.
$\square$

3 Théorème de reconstruction

Soit $Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c$ la sous-catégorie pleine de $Ho(*/Es_{\mathbb{U}})$ des espaces connexes par arcs. Nous disposons du foncteur (défini à la fin du §2.2)

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c & \longrightarrow & Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}}) \\ (X, x) & \mapsto & (\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x). \end{array}$$

On le compose avec $\mathbb{R}\Omega_* : Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}}) \longrightarrow Ho(*/Es_{\mathbb{V}})_c$, pour obtenir

$$B\mathbb{R}\underline{End}(L\omega) : Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c \longrightarrow Ho(*/Es_{\mathbb{V}})_c.$$

Théorème 3.1 *Pour tout $(X, x) \in Ho(Es_{\mathbb{U}})_c$, le Δ^o-espace $\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x)$ est un H_∞-espace. De plus, foncteur $(X, x) \mapsto B\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x)$ est isomorphe à l'inclusion naturelle $Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c \longrightarrow Ho(*/Es_{\mathbb{V}})_c$.*

Preuve: De manière équivalente il faut montrer que pour tout $(X, x) * /Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, il existe un isomorphisme dans $Ho(Pr\Delta^o - SEns_{\mathbb{V}})$, fonctoriel en (X, x)

$$\mathbb{R}\Omega_x X \simeq \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x).$$

En effet, comme $\mathbb{R}\Omega_x X$ est un H_∞-espace, il en sera de même de $\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x)$.

Tout d'abord, par le corollaire 2.17, le foncteur $(X, x) \mapsto \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x)$ est isomorphe à $(X, x) \mapsto \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_{S(x)})$, où $L\omega_{S(x)} : Fib(S(X)) \longrightarrow Top$ est le morphisme fibre au point $S(x) \in S(X)$. Rappelons que le foncteur $d : Ho(SGp_{\mathbb{U}}) \longrightarrow Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})_c$ est une équivalence de catégories (où $Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})_c$ est la sous-catégorie de $Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})$ formée des objets connexes), dont nous avons construit un inverse explicite $G : Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})_c \longrightarrow Ho(SGp_{\mathbb{U}})$ (voir le paragraphe 1.1). Ainsi, pour $(S, s) \in Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})$, l'isomorphisme naturel $(S, s) \simeq d(G(S, s))$ et le lemme 2.8 induisent un isomorphisme dans $Ho(*/1 - PrCat_{\mathbb{V}})$, fonctoriel en (S, s)

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S), Top), L\omega_s) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(d(G(S, s))), Top), L\omega_*).$$

Ainsi, d'après le théorème 2.22, on dispose d'un isomorphisme fonctoriel en (S,s)

$$(\mathbb{R}\underline{Hom}(Fib(S),Top),L\omega_s) \simeq (\mathbb{R}\underline{Hom}(G(S,s)-Top,Top),L\omega_{G(S,s)}),$$

où $\omega_{G(S,s)} : G(S,s)-SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}$ est le foncteur d'oubli de la structure de $G(S,s)$-module. En composant avec $\mathbb{R}\Omega_*$ on trouve un isomorphisme fonctoriel en (S,s)

$$\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_s) \simeq \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_{G(S,s)}).$$

En résumé, on dispose donc pour tout $(X,x) \in Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c$, d'un isomorphisme fonctoriel en (X,x)

$$\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x) \simeq \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_{G(S(X),S(x))}).$$

D'après le corollaire 2.19, pour tout $G \in SGp_{\mathbb{U}}$, le foncteur $\omega_G : G-SEns_{\mathbb{U}} \longrightarrow SEns_{\mathbb{U}}$ (d'adjoint à gauche F) vérifie les hypothèses du corollaire 1.11. Ceci implique que le foncteur

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})_c & \longrightarrow & Ho(Pr\Delta^o - SEns_{\mathbb{V}}) \\ (S,s) & \mapsto & \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_{G(S,s)}) \end{array}$$

est en réalité isomorphe au foncteur

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/SEns_{\mathbb{U}})_c & \longrightarrow & Ho(Pr\Delta^o - SEns_{\mathbb{V}}) \\ (S,s) & \mapsto & \underline{End}_{G(S,s)}(F(*))^o, \end{array}$$

où $\underline{End}_{G(S,s)}(F(*))^o$ est le monoïde simplicial opposé à celui des endomorphismes de l'objet $F(*) \in G(S,s)-SEns_{\mathbb{U}}$. Mais par définition, $F(*)$ est l'ensemble simplicial sous-jacent à $G(S,s)$, sur lequel $G(S,s)$ opère par translations à gauche. Or, il est immédiat de vérifier que lorsque $G \in SGp_{\mathbb{U}}$, le morphisme naturel de monoïdes simpliciaux

$$G \longrightarrow \underline{Hom}_G(G)^o,$$

donné par l'action de G sur lui-même à droite, est un isomorphisme. Ainsi, pour tout $(X,x) \in Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c$, $\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_{G(S(X),S(x))})$ est naturellement isomorphe à $G(S(X),S(x))$. Ceci implique donc que l'on a des isomorphismes de Δ^o-espaces, fonctoriels en (X,x)

$$\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x) \simeq \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_{G(S(X),S(x))}) \simeq G(S(X),S(x)).$$

Comme $G(S(X),S(x))$ est un groupe simplicial, et donc un H_∞-espace, ceci implique en particulier la première assertion du théorème.

D'après le théorème 1.4 et la proposition 1.5 le foncteur

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c & \longrightarrow & Ho(H_\infty - SEns_{\mathbb{U}}) \\ (X,x) & \mapsto & G(S(X),S(x)) \end{array}$$

est un inverse de $B : Ho(H_\infty - SEns_{\mathbb{U}}) \longrightarrow Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c$, et donc est naturellemet isomorphe au foncteur $\mathbb{R}\Omega_* : Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c \longrightarrow Ho(H_\infty - SEns_{\mathbb{U}})$. En d'autres termes, il existe des isomorphismes fonctoriels de H_∞-espaces $G(S(X),S(x)) \simeq \Omega_*(X,x)$.

En conlusion, pour tout $(X,x) \in Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c$, on dispose d'isomorphismes fonctoriels de H_∞-espaces

$$\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x) \simeq G(S(X),S(x)) \simeq \mathbb{R}\Omega_*(X,x),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire 3.2 *Pour tout $(X,x) \in */Es_{\mathbb{U}}^{cw}$, soit $Loc(X)$ la 1-catégorie de Segal des champs localement constants sur X, et $L\omega_x$ son foncteur fibre en x. Alors il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(Pr\Delta^o - SEns_{\mathbb{V}})$*

$$\mathbb{R}\Omega_x X \simeq \mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x).$$

En particulier, il existe des isomorphismes fonctoriels

$$\pi_m(X,x) \simeq \pi_{m-1}(\mathbb{R}\underline{End}(L\omega_x), Id)).$$

Remarques:

- On peut remarquer que le groupe des automorphismes du foncteur d'inclusion $Ho(*/Es_{\mathbb{U}})_c \longrightarrow Ho(*/Es_{\mathbb{V}})_c$ est trivial. Ainsi, l'isomorphisme du théorème 3.1 est en réalité unique. De même, il existe un unique isomorphisme fonctoriel $\Omega_x X \simeq \mathbb{R}End(\omega_x)$.

- Pour tout champ localement constant $F \in Ho(Loc(X))$, on dispose d'un morphisme de H_∞-espaces *d'évaluation en* F

$$\mathbb{R}End(\omega_x) \longrightarrow \mathbb{R}End(\omega_x(F)).$$

  A travers léquivalence du corollaire 3.2, ce morphism induit un morphism bien défini de H_∞-espaces

$$\Omega_x X \longrightarrow \mathbb{R}End(\omega_x(F)),$$

  qui peut être compris comme *l'∞-monodromie du champ F*. Le morphisme $\Omega_x X \longrightarrow \mathbb{R}End(\omega_x)$ est alors une sorte d'*intégration* de tous les morphismes $\Omega_x X \longrightarrow \mathbb{R}End(\omega_x(F))$ lorsque F varie dans la 1-catégorie de Segal $Loc(X)$. C'est pour cela qu'il mérite peut-être le nom d'*∞-monodromie universelle.*

- Dans sa lettre à L. Breen (datée du 17/02/1975, voir [8]) A. Grothendieck énonce des résultats proches du corollaire 3.2, et qui utilisent une hypothétique notion de *champs en n-groupoïdes localement constants.* Pour être plus précis, citons en quelques lignes (haut de la page 3).

  ...il faudrait donc expliciter comment un n-groupoïode $\mathcal{C}_n$ se récupère, à n-équivalence près, par la connaissance de la n-catégorie $\mathcal{T}_n := (n-\underline{Hom})(\mathcal{C}_n, ((n-1)-Cat))$ des $(n-1)$-systèmes locaux sur $\mathcal{C}_n$. On aurait envie de dire que $\mathcal{C}_n$ est la catégorie des "n-foncteurs fibres" sur $\mathcal{T}_n$, i.e. des n-foncteurs $\mathcal{T}_n \longrightarrow ((n-1)-Cat)$ ayant certaines propriétés d'exactitude ....

  Nous avons envie d'interpréter ces quelques lignes comme une version n-tronquée et non-pointée de notre formule $X \simeq B\mathbb{R}End(\omega_x)$.

4 Conclusions

La conclusion philosophique que l'on peut tirer du corollaire 3.2 est que le type d'homotopie d'un CW complexe pointé (X,x) est entièrement codé dans la donnée catégorique $(\mathbb{R}\underline{Hom}(Loc(X), Top), L\omega_x)$. Ceci permet alors de plonger la théorie de l'homotopie des CW complexes pointés dans celle des 1-catégories de Segal munies de morphismes vers Top. Plus précisément, on peut montrer que si $Top \longrightarrow Top'$ est un modèle fibrant, alors le foncteur naturel

$$\begin{array}{ccc} Ho(*/Es_{\mathbb{U}}^{cw}) \simeq Ho(*/Es_{\mathbb{U}}) & \longrightarrow & Ho(1-PrCat/Top') \\ (X,x) & \mapsto & (Loc(X), L\omega_x) \end{array}$$

est pleinement fidèle lorsqu'on le restreint à la sous-catégorie de $Ho(*/Es_{\mathbb{U}})$ formée des objets connexes par arcs.

On peut ainsi poser raisonnablement la question de l'existence d'une notion de 1-catégories de Segal galoisiennes (voir multi-galoisiennes) généralisant la notion de catégories galoisiennes de [13, §V]. Cette notion devrait pouvoir être développée à l'aide du théorème de Beck pour les 1-catégories de Segal, qui n'est malheureusement pour le moment qu'une conjecture (voir [18, §5.10]), et devrait alors redonner une preuve plus conceptuelle du théorème 3.1 ne faisant pas intervenir de catégories de modèles fermées mais uniquement des 1-catégories de Segal. Une telle théorie permettrait aussi de posséder une nouvelle définition ainsi qu'une nouvelle compréhension du type d'homotopie étale d'un schéma (comme il est défini dans [1] par exemple), ou encore de certaines complétions utilisées en topologie algébrique (complétions profinies, nilpotentes . . .). J'espère revenir sur cette question ultérieurement.

Enfin, on peut aussi espérer développer un formalisme Tannakien pour les 1-catégories de Segal, qui est un analogue linéaire de la théorie Galoisienne, et qui permet de remplacer les champs localement constants par d'autres coefficients tels des préfaisceaux de complexes localement constants. Le lecteur intéressé par ce type de considérations pourra se reporter au manuscript temporaire [18].

Remerciements: Je remercie L. Breen, A. Hirschowitz, L. Katzarkov, C. Simpson, J. Tapia, et G. Vezzosi pour leurs très utiles commentaires et remarques au cours de discussions et correspondances sur le sujet.

Je tiens aussi à remercier l'institut Max Planck pour son hospitalité et ses conditions de travail exceptionnelles.

Références

[1] M. Artin, B. Mazur, *Etale homotopy*, Lecture Notes in Math. **100**, Springer-Verlag 1969.

[2] B. Blander, *Local projective model structure on simplicial presheaves*, pré-publication disponible à http://www.math.uiuc.edu/K-theory/.

[3] D. Dugger, S. Hollander, D. Isaksen, *Hypercovers and simplicial presheaves*, pré-publication disponible à http//www.math.purdue.edu/ ddugger.

[4] W. Dwyer, D. Kan, *Simplicial localizations of categories*, J. Pure and Appl. Algebra **17** (1980), 267 − 284.

[5] W. Dwyer, D. Kan, P. Hirschhorn, *Model categories and more general abstract homotopy theory*, prépublication disponible à http://www-math.mit.edu/ psh/.

[6] R. Fritsch, R. Piccinini, *Cellular structures in topology*, Cambridge studies in advanced mathematics **19**, Cambridge university press, Cambridge 1990.

[7] P. Goerss, J.F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, Vol. **174**, Birkhauser Verlag 1999.

[8] A. Grothendieck, *Pursuing stacks*, manuscript non publié.

[9] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[10] J.F. Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure and Appl. Algebra **47** (1987), 35 – 87.

[11] J.P. May, *Pairings of categories and spectra*, JPPA **19** (1980), 299 – 346.

[12] G. Segal, *Homotopy everything H-space*, preprint.

[13] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture notes in Math. **224**, Springer-Verlag 1971.

[14] C. Simpson, A. Hirschowitz, *Descente pour les n-champs*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/9807049.

[15] C. Simpson, *Algebraic aspects of higher nonabelian Hodge theory*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/9902067.

[16] C. Simpson, *A giraud-type characterisation of the simplicial categories associated to closed model categories as ∞-pretopoi*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/math.AT/9903167.

[17] C. Simpson, *A closed model structure for N-categories, internal Hom, N-stacks and generalized Seifert-Van Kampen*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/alg-geom/9704006.

[18] B. Toen, *Dualité de Tannaka supérieure I: Structures monoidales*, preprint de l'institut Max Planck, $MPI - 2000 - 57$, disponible à http://mpim-bonn.mpg.de.

Bertrand Toën: Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2. e-mail: toen@math.unice.fr